

---

# Correlações não locais para uma partícula e estado original EPR no experimento de fenda dupla

Oziel Ribeiro de Araújo

---



Universidade Federal do Piauí – UFPI

Centro de Ciências da Natureza – CCN

Teresina, 23 de Fevereiro de 2017

Correlações Não locais para uma única Partícula e estado Original  
EPR no experimento de fenda dupla

**Oziel Ribeiro de Araújo**

***Orientador:* Prof. Dr. Irísmar Gonçalves da Paz**

Dissertação apresentada a Universidade Federal do Piauí  
– UFPI, como parte dos requisitos para obtenção do título  
de Mestre em Física da Matéria Condensada.

**UFPI – Teresina  
de 2017**

*Este trabalho é dedicado a meus pais.*

# AGRADECIMENTOS

---

---

Gostaria de agradecer em especial aos meus pais Ezequiel Ribeiro de Araújo e Maria Das Dores de Araújo pela educação, conselhos e a minha irmã Oziene Ribeiro de Araújo e a minha namorada Edinete Soares Monte.

Ao professor José Pimentel, pelos ensinamentos pela paciência, dedicação e seriedade com seus alunos e pelos seus conselhos que sempre me incentivarão.

Ao professor, orientador e amigo Irismar Gonçalves da Paz por todos os momentos de aprendizado pela sua dedicação em ensinar, atenção, paciência. Ao professor Marcos Donizeti Rodrigues Sampaio da Universidade Federal de Minas Gerais e o Aluno de doutorado Helder Alexander da Universidade Federal de Minas Gerais. Aos amigos do grupo de pesquisa: Lucas, Carlos Henrique, Fabrício Lustosa, Crislane Brito.

# RESUMO

Correlações entre observáveis associados a duas partículas tem sido estudadas teoricamente e experimentalmente para mostrar o carácter não local da mecânica quântica. O exemplo mais conhecido é de um sistema de duas partículas de spin meio. Características não locais também foram observadas para observáveis que comutam associados a uma única partícula. Entretanto, características não locais para observáveis que não comutam associados a uma única partícula ainda não foram tratadas anteriormente. Nesta dissertação, mostramos que há não localidade para as correlações entre os observáveis posição e momento associados a uma única partícula. Para tanto, consideramos o experimento de fenda-dupla modelado por um estado Gaussiano inicialmente correlacionado. Observamos que o carácter positivo ou negativo da função de Wigner associada com a função de onda na tela de detecção depende das correlações (um tipo de correlação entre posição e momento que depende do estado inicial e da dinâmica quântica). Para mostrar que existem correlações não locais entre posição e momento quando a partícula chega na tela de detecção construímos a desigualdade de Bell a partir da função de Wigner. Observamos que tal desigualdade é violada quando a função de Wigner tem partes negativas bem como quando só há partes positivas. O caso correspondente a função de Wigner completamente positiva é análogo ao estado original EPR (de duas partículas) para uma única partícula.

**Palavras-chave:** Não-localidade, uma partícula, desigualdade de Bell, estado EPR..

# ABSTRACT

Correlations between observables associated with two particles have been studied theoretically and experimentally to show the nonlocal character of the quantum mechanics. The best known example is a system of two medium spin particles. Nonlocal characteristics were observed for observable commutations associated with a single particle not yet treated previously. In this dissertation, we show that there is nonlocality for the correlations between the observable position and momentum associated with a single particle. Therefore, we consider the double-slit experiment modeled by an initially correlated Gaussian state. We observe the positive or negative character of the Wigner function associated with the wave function in the detection screen depending on the correlations (type of correlation between position and momentum that depends on the initial state and the quantum dynamics). To show that there are non-local correlations between position and momentum when the particle arrives at the detection screen, we construct the Bell inequality from the Wigner function. We observe that such inequality is violated when the Wigner function has negative parts as well as when there are only positive parts. The case corresponding to the Wigner function completely positive is the analogue of the original EPR state (From two particles to a single particle).

**Key-words:** Keywords: Nonlocality, single particle, Bell inequality, EPR state.

# LISTA DE ILUSTRAÇÕES

---

---

Figura 1	– Configuração do experimento de fenda dupla. Pacote de onda gaussiano inicialmente correlacionado de largura inicial transversa $\sigma_0$ se propagando durante um tempo $t$ até atingir uma fenda dupla, e um tempo $\tau$ da fenda dupla ao anteparo. As fendas são consideradas gaussianas de largura $\beta$ e separadas por uma distância $d$ . . . . .	15
Figura 2	– Correlações $\sigma_{xp}$ em função de $t/\tau_0$ para $\tau = 18\tau_0$ e $\rho = -1$ . . . . .	19
Figura 3	– Esboço da função de Wigner que passa por uma única fenda. (a) Temos a função de Wigner em função de $x$ e $k$ para o tempo no qual as correlações são mínimas. (b) Função de Wigner em função de $x$ e $k$ para o tempo no qual as correlações são máximas . . . . .	20
Figura 4	– Esboço da função de Wigner no experimento de fenda dupla. (a) Temos a função de Wigner em função de $x$ e $k$ para o tempo no qual as correlações são mínimas. (b) Função de Wigner em função de $x$ e $k$ para o tempo no qual as correlações são máximas . . . . .	21
Figura 5	– Contribuição de cada termo das correlações $\sigma_{xp}$ , valor do primeiro termo linha (potilhada), segundo linha (sólida), terceiro linha (tracejada) e quarto linha (tracejada-ponto), como podemos ver as correlações nos tempos de mínimo e máximo são governadas, respectivamente pelo primeiro e o segundo termo da equação (3.8) . . . . .	21
Figura 6	– Função de Wigner em função de $x$ e $k$ . (a) Consideramos apenas os termos $w_1 + w_2$ da equação (3.3) para o tempo no qual as correlações são mínimas. (b) Levamos em consideração apenas o termo de interferência que é dado na equação (3.3) para o tempo no qual as correlações são mínimas. (c) Consideramos apenas os termos $w_1 + w_2$ da equação (3.3) para o tempo no qual as correlações são máximas. (d) Levamos em consideração apenas o termo de interferência que é dado na equação (3.3) para o tempo no qual as correlações são máximas. . . . .	22
Figura 7	– Experimento mental EPR. . . . .	25
Figura 8	– Desigualdade de Bell para $t_{max}$ , em função de $x$ e $k$ para a função de Wigner que passa por uma única fenda. . . . .	27

Figura 9 – Desigualdade de Bell, em função de  $x$  e  $k$ . (a) Desigualdade de Bell para  $t_{min}$ . A violação máxima é  $B \approx 2.19$ . (b) Desigualdade de Bell para  $t_{max}$ . A violação máxima é  $B \approx 2.59$ . Mostramos apenas, valores que excedem o limite imposto pelas teorias locais. (c) Mostramos que os termos  $w_1 + w_2$  da equação (3.3) são irrelevantes na violação da desigualdade de Bell, como podemos ver  $w_1 + w_2 \approx 0$  . . . . . 28

Figura 10 – Observamos que o determinante da matriz de covariância tende para o valor mínimo  $D_c \approx 11\hbar^2$ , podemos observar que  $D_c > \hbar^2/4$ , para todos os tempos. 30



# SUMÁRIO

---

---

1	INTRODUÇÃO . . . . .	9
2	EXPERIMENTO DE FENDA DUPLA MODELADO POR PACO- TES DE ONDA GAUSSIANO . . . . .	12
2.1	Correlações entre posição e momento . . . . .	12
3	FUNÇÃO DE WIGNER E CORRELAÇÕES $\sigma_{xp}$ . . . . .	17
4	CORRELAÇÕES NÃO LOCAIS E DESIGUALDADE DE BELL . . . . .	24
4.1	Relação de Incerteza de Schrödinger . . . . .	28
5	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS . . . . .	31
	REFERÊNCIAS . . . . .	32

---

# INTRODUÇÃO

---

Emaranhamento e não-localidade tem sido intensivamente estudados desde que Einstein, Podolsky e Rosen (EPR) apresentaram um artigo questionando sobre a mecânica quântica descrever completamente toda a realidade [1]. O crescente interesse nestas propriedades quânticas decorreu da sua relevância no campo da ciência da informação quântica [2]. A desigualdade de Bell [3], derivada em 1964, tornou-se uma ferramenta importante para investigar efeitos de não localidade em sistemas de variáveis discretas tais como dois fótons emaranhados em uma polarização, em uma série de experimentos [4], estados emaranhados de íons aprisionados [5] etc. A violação da desigualdade de Bell, também foi estudada para uma única partícula considerando fótons emaranhados em posição e momento [6], nêutrons emaranhados [7] Recentemente, um experimento mostrou a violação da desigualdade de Bell usando elétrons separados por uma distância de 1,3 quilômetros [8].

Tal constatação é de interesse da informação quântica demonstrar a não localidade em sistemas descritos por variáveis contínuas, tal como no estado original EPR [9], ou dois modos de estados comprimidos [10]. Em sistemas de variáveis contínuas, a não-localidade de Bell tem sido investigada com ajuda de observações divididos, por exemplo, pseudo-spin [11], e por observável semelhante [12]. Correlações quânticas, de variáveis contínuas, podem ser analisadas no espaço de fase usando a função de Wigner que torna esta função uma ferramenta importante para estudar não-localidade em sistemas de variáveis contínuas. Além disso, a função de Wigner pode ser medida em diferentes sistemas [13, 14, 15], assim como pode ser calculada completamente para sistemas quânticos arbitrários [16]. Diversos são os esforços, para compreender a relação entre a não-localidade de Bell e a função de Wigner [17, 18, 19, 20, 21]. Tais estudos, mostram que a parte positiva da função de Wigner do estado EPR pode ser usada como estrutura natural no espaço de fase em que o caráter não local desse estado pode ser estudado [22].

As correlações entre posição e momento  $\sigma_{xp}$ , são correlações quânticas que indicam dependência entre a posição e o momento de uma única partícula. Um caso simples, é a solução de

um pacote de onda Gaussiano de incerteza-mínima dada pela equação de Schrödinger para uma partícula livre. As correlações  $\sigma_{xp}$  são zero em  $t = 0$ , mas aparecem para  $t > 0$  como resultado da dinâmica quântica [23, 24]. Por outro lado, estados mais complexos tais como estados comprimidos ou combinações lineares de estados Gaussianos podem apresentar correlações iniciais, ou seja, correlações que não dependem da evolução temporal [25, 26, 27, 28]. Mostrou-se, que a existência de correlações  $\sigma_{xp}$  está relacionada com as fases da função de onda [23]. As correlações podem ser usadas para fornecer informações sobre outras quantidades em física. Por exemplo, foram mostradas alterações qualitativas no padrão de interferência na fenda dupla com crescimento das correlações em função do tempo. Foi mostrado que a fase de Gouy presente em ondas de matéria está diretamente relacionada com essas correlações. Recentemente, foi mostrado que o máximo dessas correlações está relacionado com o número mínimo de franjas de interferência no experimento de fenda dupla [29].

O experimento de fenda dupla, tem sido usado para elucidar aspectos fundamentais da teoria quântica [30]. A dualidade onda partícula foi observada no experimento de fenda dupla com elétrons [31], nêutrons [32], átomos [33]. Recentemente, difração controlada de elétrons na fenda dupla foi realizada experimentalmente na qual distribuições de probabilidade em arranjos de fenda única e fenda dupla foram observadas [34, 35]. Em nosso modelo teórico, adotamos os parâmetros de nêutrons: massa  $m = 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$ , largura inicial do pacote  $\sigma_0 = 7,8 \mu\text{m}$ , que corresponde a largura efetiva de  $2\sqrt{2}\sigma_0 \approx 22 \mu\text{m}$ , largura da fenda  $\beta = 7,8 \mu\text{m}$ , separação entre as fendas  $d = 125 \mu\text{m}$  e comprimento de onda de de Broglie  $\lambda = 2 \text{ nm}$ . Estes dados, foram utilizados anteriormente em um experimento de fenda dupla, com nêutrons por A. Zeilinger e colaboradores [44]. Neste trabalho, usamos a configuração de fenda dupla para estudar outro aspecto interessante na teoria quântica, a não localidade associada com observáveis para uma única partícula. Esta configuração, nos permite fazer a conexão entre as correlações  $\sigma_{xp}$  e as partes positivas e negativas da função de Wigner. As correlações não locais, dos observáveis posição e momento de uma única partícula são obtidas construindo a desigualdade de Bell a partir da função de Wigner. Damos um tratamento gaussiano ao pacote de ondas inicial e a abertura das fendas. Neste caso, o estado de uma única partícula na tela de detecção no experimento de fenda dupla será a superposição de duas gaussianas. A única partícula, após a fenda dupla é representada por duas partes. Esta configuração, é essencial para construir para uma única partícula o estado análogo ao de duas partículas e observar a não localidade associada a uma única partícula. O comportamento das correlações  $\sigma_{xp}$ , nos permite extrair algumas informações sobre o comportamento da função de Wigner. Para  $\rho \geq 0$  essas correlações são máximas para um dado tempo de propagação. O máximo das correlações está relacionado com o valor máximo da parte negativa da função de Wigner. Por outro lado, para  $\rho < 0$  essas correlações apresentam valores máximos e mínimos para tempos de propagação específicos. Observamos que o valor mínimo das correlações  $\sigma_{xp}$  está relacionado com a parte positiva da função de Wigner. O estado na tela de detecção com correlações máximas dá o valor máximo para a violação da desigualdade de Bell, já o estado com correlações mínimas dá o valor mínimo. A função de Wigner, obtida

do estado que possui correlações  $\sigma_{xp}$  mínimas não exibe valores negativos. A forma positiva ou gaussiana da função de Wigner foi usada para estudar o estado original EPR [22]. Portanto, o estado na tela de detecção com correlações  $\sigma_{xp}$  mínimas pode ser considerado análogo ao estado original (EPR) para uma única partícula.

Esta dissertação está dividida da seguinte maneira: No capítulo 2, modelamos o experimento de fenda dupla com ondas de matéria considerando pacotes Gaussianos inicialmente correlacionados. O pacote de onda inicial, evolui durante um tempo  $t$  da fonte até a fenda dupla e  $\tau$  da fenda até o anteparo. Calculamos, a função de onda que passa por cada fenda usando a função de Green para a partícula livre. No capítulo 3, obtemos a função de Wigner e as correlações  $\sigma_{xp}$  para o estado que é uma combinação linear dos estados que passam por cada fenda. Aqui é mostrado, que o mínimo das correlações  $\sigma_{xp}$  está relacionado com a parte positiva da função de Wigner e o máximo das correlações está relacionado com a parte negativa da função de Wigner. No capítulo 4, calculamos a desigualdade de Bell para os observáveis posição e momento a partir da função de Wigner mostramos que há um caráter não local para as correlações entre posição e momento de uma única partícula. Discutimos a condição para construirmos um estado análogo ao estado EPR para um única partícula no experimento de fenda dupla. No capítulo 5, concluímos nossos resultados.

---

# EXPERIMENTO DE FENDA DUPLA MODELADO POR PACOTES DE ONDA GAUSSIANO

---

Neste capítulo, modelamos o experimento de fenda dupla com pacote de ondas gaussianos inicialmente correlacionados. Obtemos resultados que mostram que para o estado inicialmente correlacionado a posição e o momento são dependentes mesmo em  $t = 0$ , isto é,  $\sigma_{xp} \neq 0$ . A correlação inicial é dada pelo parâmetro de correlação  $\rho$  que pode variar de  $-\infty < \rho < \infty$ , o mesmo foi usado para calcular o coeficiente de transmissão em uma barreira potencial delta [28]. As flutuações quânticas em um estado com  $\rho \neq 0$  são maiores. Em outras palavras, sistemas físicos descritos por estados inicialmente correlacionados,  $\rho \neq 0$ , possuem informações extras quando comparados com estados não correlacionados  $\rho = 0$ . Por exemplo, foram mostradas alterações qualitativas no padrão de interferência na fenda dupla com o crescimento do tempo em função das correlações entre posição e momento. Consideramos um pacote de ondas coerente inicialmente correlacionado, de largura inicial  $\sigma_0$ , se propagando durante um tempo  $t$  até atingir a fenda dupla, que o divide em dois pacotes gaussianos. Depois da fenda dupla, os dois pacotes se propagam durante um tempo  $\tau$  até chegarem ao anteparo, onde eles são recombinados.

## 2.1 Correlações entre posição e momento

Correlações entre posição e momento é uma propriedade estatística que está definida para distribuições no espaço de fase clássico e para pacotes de onda da mecânica quântica. Em uma distribuição estatística de duas variáveis clássicas, tal como  $x$  e  $p$ , suje uma pergunta se as duas variáveis são ou não correlacionadas. Por exemplo, entre pessoas não existe uma única relação entre altura e peso, mas contudo os dois são estatisticamente correlacionados no sentido de que uma pessoa mais alta tende a ser mais pesada do que uma pessoa mais baixa. Em mecânica

estatística clássica, as correlações entre posição e momento pode ser descrita por meio de uma densidade de probabilidade conjunta  $P(x, p)$ . Por exemplo, para duas quantidades clássicas,  $x$  e  $p$ , é definida como

$$\text{cov}(x, p) = \langle (x - \langle x \rangle)(p - \langle p \rangle) \rangle = \langle xp \rangle - \langle x \rangle \langle p \rangle, \quad (2.1)$$

pode ser igualmente definida como função de correlação

$$\text{cor}(x, p) = \frac{\langle (x - \langle x \rangle)(p - \langle p \rangle) \rangle}{\sigma_x \sigma_p}, \quad (2.2)$$

onde  $\sigma_x$  e  $\sigma_p$  são os desvio padrão das variáveis  $x$  e  $p$ . A função de correlação  $\text{cor}(x, p)$  é adimensional é uma medida do grau de dependência das variáveis  $x$  e  $p$ . Para duas variáveis,  $x$  e  $p$ , que são independentes temos as seguintes propriedades: *I*)  $\text{cov}(x, p) = 0$ , *II*)  $P(x, p) = X(x)P(p)$ . Onde  $X(x)$  e  $P(p)$  são as distribuições de probabilidade em posição e momento.

Na teoria quântica definimos essas correlações substituindo  $p$  pelo operador  $\hat{p}$  e  $x$  pelo operador  $\hat{x}$ , ou seja

$$\sigma_{xp} = \frac{1}{2} \langle \hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x} \rangle - \langle \hat{x} \rangle \langle \hat{p} \rangle. \quad (2.3)$$

onde  $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$

Não existe, em mecânica quântica uma densidade de probabilidade conjunta que representa a probabilidade de encontrar uma partícula numa determinada área do espaço de fase. Nesta dissertação, consideramos um pacote de ondas gaussianos coerente inicialmente correlacionado, proporcionamos uma melhor compreensão das correlações entre posição e momento em mecânica quântica com o auxílio da função de Wigner.

A função de onda no anteparo para a onda que passa através da fenda 1(+) ou da fenda 2(-) é dada por

$$\psi_{1,2}(x, t, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} dx_j \int_{-\infty}^{\infty} dx_i G_2(x, t + \tau; x_j, t) F(x_j \pm d/2) G_1(x_j, t; x_i, 0) \psi_0(x_i), \quad (2.4)$$

onde

$$G_1(x_j, t; x_i, 0) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar t}} \exp \left[ \frac{im(x_j - x_i)^2}{2\hbar t} \right], \quad (2.5)$$

$$G_2(x, t + \tau; x_j, t) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar \tau}} \exp \left[ \frac{im(x - x_j)^2}{2\hbar \tau} \right], \quad (2.6)$$

$$F(x_j \pm d/2) = \frac{1}{\sqrt{\beta} \sqrt{\pi}} \exp \left[ -\frac{im(x_j \pm d/2)^2}{2\beta^2} \right], \quad (2.7)$$

$$\psi_0(x_i) = \frac{1}{\sqrt{\sigma} \sqrt{\pi}} \exp \left[ -\frac{x_i^2}{2\sigma_0^2} + \frac{i\rho x_i^2}{2\sigma_0^2} \right]. \quad (2.8)$$

os termos  $G_1(x_j, t; x_i, 0)$  e  $G_2(x, t + \tau; x_j, t)$  são os propagadores para uma partícula livre, as funções  $F(x_j \pm d/2)$  descrevem as aberturas das fendas que são consideradas Gaussianas de largura  $\beta$ , separadas por uma distância  $d$ ,  $\sigma_0$  é a largura transversa da primeira fenda, onde o pacote de onda é preparado,  $m$  é a massa da partícula,  $t$  é o tempo de propagação da fonte até a fenda dupla e  $\tau$  é o tempo de propagação da fenda dupla até o anteparo. O parâmetro  $\rho$ , garante que o estado inicial é correlacionado em posição e momento. De fato, obtemos para o estado inicial  $\psi_0(x_i)$  que possui incerteza em posição  $\sigma_{xx} = \sigma_0/\sqrt{2}$ , e incerteza em momento  $\sigma_{pp} = (\sqrt{1 + \rho^2})\hbar/\sqrt{2}\sigma_0$  e as correlações entre posição e momento são  $\sigma_{xp} = \hbar\rho/2$  este resultado mostra que mesmo em  $t = 0$  o momento e a posição são dependentes. Para  $\rho = 0$  temos um simples pacote de onda gaussiano não-correlacionado  $\sigma_{xp} = 0$ . Para obtermos expressões analíticas para a função de Wigner e as correlações  $\sigma_{xp}$  na tela de detecção, usamos uma função de transmissão gaussiana por representar uma boa aproximação da realidade experimental e também porque são matematicamente mais simples de serem tratadas. Na figura (1) abaixo temos o esboço experimental

Após algumas manipulações algébricas, obtemos para a onda que passou pela fenda 1(+) o seguinte resultado

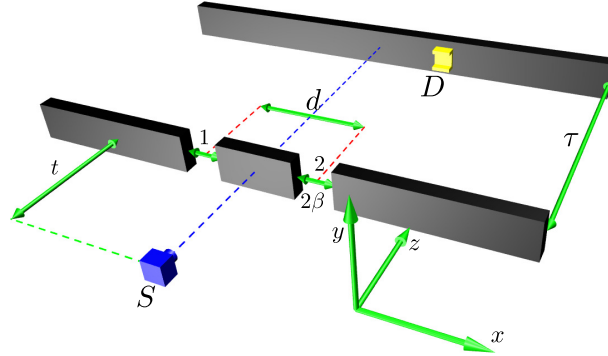


Figura 1 – Configuração do experimento de fenda dupla. Pacote de onda gaussiano inicialmente correlacionado de largura inicial transversa  $\sigma_0$  se propagando durante um tempo  $t$  até atingir uma fenda dupla, e um tempo  $\tau$  da fenda dupla ao anteparo. As fendas são consideradas gaussianas de largura  $\beta$  e separadas por uma distância  $d$ .

$$\psi_1(x, t, \tau) = \frac{1}{\sqrt{B\sqrt{\pi}}} \exp\left[-\frac{(x + D/2)^2}{2B^2}\right] \exp\left(\frac{imx^2}{2\hbar R} + i\Delta x + i\theta + i\mu\right), \quad (2.9)$$

onde

$$R(t, \tau) = \tau \frac{\left(\frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{b^2}\right)^2 + \frac{m^2}{\hbar^2} \left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{r}\right)^2}{\frac{1}{\beta^4} + \frac{1}{\sigma_0^4(t^2 + \tau_0^2 + 2\tau_0 t \rho + t^2 \rho^2)} \left[\tau_0^2 + \frac{t\tau_0^2}{\tau} + \tau_0^2 \rho^2 + \frac{\tau_0^3 \rho}{\tau} + \frac{t\tau_0^2 \rho^2}{\tau} + \frac{2\tau_0^2 \sigma_0^2}{\beta}\right]}, \quad (2.10)$$

$$B^2(t, \tau) = \frac{\left(\frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{b^2}\right)^2 + \frac{m^2}{\hbar^2} \left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{r}\right)^2}{\left(\frac{m}{\hbar\tau}\right)^2 \left(\frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{b^2}\right)}, \quad (2.11)$$

$$\Delta(t, \tau) = \frac{\tau \sigma_0^2 d}{2\tau_0 \beta^2 B^2}, \quad (2.12)$$

$$D(t, \tau) = d \frac{\left(1 + \frac{\tau}{r}\right)}{\left(1 + \frac{\beta^2}{b^2}\right)}, \quad (2.13)$$

$$\theta(t, \tau) = \frac{md^2 \left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{r}\right)}{8\hbar\beta^4 \left[\left(\frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{b^2}\right)^2 + \frac{m^2}{\hbar^2} \left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{r}\right)^2\right]}, \quad (2.14)$$



$$\mu(t, \tau) = -\frac{1}{2} \arctan \left[ \frac{t + \tau \left( 1 + \frac{\sigma_0^2}{\beta^2} + \frac{\hbar \rho}{m \beta^2} \right)}{\tau_0 \left( 1 - \frac{t \tau \sigma_0^2}{\tau_0 \beta^2} \right) + \rho (t + \tau)} \right], \quad (2.15)$$

$$b(t) = \frac{\sigma_0}{\tau_0} [t^2 + \tau_0^2 + 2t\tau_0\rho + t^2\rho^2]^{\frac{1}{2}}, \quad (2.16)$$

$$r(t) = \frac{(t^2 + \tau_0^2 + 2t\tau_0\rho + t^2\rho^2)}{[t(1 + \rho^2) + \rho\tau_0]}. \quad (2.17)$$

Para obtermos as expressões para a onda que passou pela a fenda 2 basta substituímos o parâmetro  $d$  por  $-d$  nas expressões correspondentes à onda que passou pela a fenda 1. Aqui o parâmetro  $B(t, \tau)$  é a largura do feixe para a propagação através de uma fenda,  $R(t, \tau)$  é o raio de curvatura das frentes de ondas para a propagação através de uma fenda,  $b(t)$  é a largura do feixe para a propagação livre e  $r(t)$  é o raio de curvatura das frentes de ondas para a propagação livre,  $D(t, \tau)$  é a separação entre os pacotes de onda produzidos na fenda dupla,  $\Delta(t, \tau)$  é uma fase que varia linearmente com a coordenada transversa  $x$ ,  $\theta(t, \tau)$  e  $\mu(t, \tau)$  são fases que dependem do tempo, são relevantes na intensidade apenas se as fendas tiverem larguras diferentes. Em especial,  $\mu(t, \tau)$  é a fase de Gouy de ondas de matéria para a propagação através da fenda. Diferentes dos resultados obtidos em [29], todos os parâmetros acima são alterados pelo parâmetro de correlação  $\rho$ ,  $\tau_0 = m\sigma_0^2/\hbar$  é uma escala de tempo intrínseco que essencialmente corresponde ao tempo durante o qual uma distância da ordem da extensão de pacote de onda é percorrida com uma velocidade correspondente à velocidade de dispersão. Esse parâmetro, é visto como um tempo característico para o envelhecimento do estado inicial [36, 29], uma vez que é o tempo a partir do qual o estado evoluído adquire propriedades completamente diferentes do estado inicial.

## FUNÇÃO DE WIGNER E CORRELAÇÕES $\sigma_{xp}$

O formalismo proposto por Wigner tem sido desenvolvido desde 1932 [37]. Esse formalismo apresenta propriedades de um estado quântico no espaço de fase. Essas propriedades aparecem quando calculamos a função de Wigner, pois essa função apresenta valores negativos, através dos quais pode-se evidenciar aplicações em física da matéria condensada [38], óptica quântica [39]. Nesse formalismo, o estado do sistema é descrito pela função de Wigner  $W(x, k)$ . Apesar de ser real e normalizada, pode assumir valores negativos, o que contraria o sentido de uma distribuição. Por esse motivo a função de Wigner é conhecida na literatura como uma função de quase-distribuição. Neste capítulo, usamos as funções de ondas obtidas anteriormente para calcular a função de Wigner na tela de detecção. A partir da função de Wigner, calculamos as correlações entre posição e momento  $\sigma_{xp}$ . Observamos que as correlações apresentam um mínimo e um máximo em função do tempo de propagação  $t$  para um valor negativo do parâmetro de correlação  $\rho$ . Para valores de  $\rho$ , positivos ou nulos, as correlações exibem apenas um máximo. Mostramos que a função de Wigner, para o estado que possui correlações mínimas não apresenta parte negativa. No entanto, para o estado em que o parâmetro de correlação  $\rho \geq 0$  a função de Wigner apresenta valores negativos para alguns valores da posição  $x$  e momento  $p$  tais características representam um estado quântico [40]. O estado com parâmetro de correlação  $\rho < 0$  é conhecido como um estado contraído [41].

A função de Wigner ou distribuição de quase-probabilidade no espaço de fase para uma função de onda em uma configuração unidimensional é definida como [37]

$$W(x, k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-iky} \psi^* \left( x - \frac{y}{2} \right) \psi \left( x + \frac{y}{2} \right), \quad (3.1)$$

algumas das propriedades da função de wigner são as seguintes: I)  $\int W(x, p) dx dp = 1$ , II)  $|\psi(x)|^2 = \int W(x, p) dp$ , III)  $|\psi(p)|^2 = \int W(x, p) dx$ ,

onde

$$\psi(x, t, \tau) = \frac{\Psi_1(x, t, \tau) + \Psi_2(x, t, \tau)}{\sqrt{2 + 2\exp\left[-\frac{D^2}{4B^2} - \Delta^2 B^2\right]}}, \quad (3.2)$$

a equação (3.2), é a função de onda normalizada na tela de detecção no experimento de fenda dupla.

Resolvendo a integral da equação (3.1), obtemos o seguinte resultado

$$\begin{aligned} W(x, k) = & W_1(x, k) + W_2(x, k) + \frac{2}{\pi\alpha^2} \exp\left[-\left(\frac{x^2}{B^4} + \left(k - \frac{mx}{\hbar R}\right)^2 B^2\right)\right] \\ & \times \cos\left[\left(k - \frac{mx}{\hbar R}\right) D + 2\Delta x\right], \end{aligned} \quad (3.3)$$

sendo

$$W_1(x, k) = \frac{1}{\pi\alpha^2} \exp\left[-\frac{\left(x + \frac{D}{2}\right)^2}{B^2}\right] \exp\left[-\left(k - \frac{mx}{\hbar R} - \Delta\right)^2 B^2\right], \quad (3.4)$$

$$W_2(x, k) = \frac{1}{\pi\alpha^2} \exp\left[-\frac{\left(x - \frac{D}{2}\right)^2}{B^2}\right] \exp\left[-\left(k - \frac{mx}{\hbar R} + \Delta\right)^2 B^2\right], \quad (3.5)$$

e

$$\alpha = 2 + 2\exp\left[-\frac{D^2}{4B^2} - \Delta^2 B^2\right] \quad (3.6)$$

Os resultados da equação (3.3) são compostas pelos termos,  $W_1(x, k)$  e  $W_2(x, k)$ , que são as funções de Wigner que passaram pelas fendas 1 e 2, respectivamente, bem como o termo de interferência.

As funções de Wigner e as correlações  $\sigma_{x,p}$  são relacionadas por [42]

$$\sigma_{xp} = \frac{\int xpW(x, p)dx dp}{\int W(x, p)dx dp}, \quad (3.7)$$

onde  $p = \hbar k$ , após algumas manipulações algébricas, temos

$$\sigma_{xp}(t, \tau) = \frac{mB^2}{2R} + \frac{(mD^2/R)}{4 + 4 \exp\left[-\frac{D^2}{4B^2} - \Delta^2 B^2\right]} - \frac{\hbar\Delta D}{2} - \frac{(m\Delta^2 B^4/R)}{1 + \exp\left[\frac{D^2}{4B^2} + \Delta^2 B^2\right]}. \quad (3.8)$$

A seguir, mostramos o gráfico da correlação  $\sigma_{x,p}$  em função do tempo  $t/\tau_0$  para nêutrons. Consideramos nêutrons, pelo fato de que a realidade experimental com os tais partículas se aproxima mais do nosso modelo de ondas de matéria completamente coerente, embora ainda tenhamos perda de coerência nos experimentos com nêutrons como discutido em [43]. Em nosso modelo teórico, adotamos os seguintes parâmetros: massa  $m = 1.67 \times 10^{-27} \text{kg}$ , largura inicial do pacote  $\sigma_0 = 7,8 \mu\text{m}$ , que corresponde a largura efetiva de  $2\sqrt{2}\sigma_0 \approx 22 \mu\text{m}$ , largura da fenda  $\beta = 7,8 \mu\text{m}$ , separação entre as fendas  $d = 125 \mu\text{m}$  e comprimento de onda de de Broglie  $\lambda = 2 \text{nm}$ . Estes dados, foram utilizados anteriormente em um experimento de fenda dupla, com nêutrons por A. Zeilinger e colaboradores [44]. Na figura 2, mostramos as correlações em função do tempo  $t/\tau_0$  para  $\tau = 18\tau_0$  e  $\rho = -1$ . Usamos o valor negativo do parâmetro de correlação  $\rho$ , com o propósito de obter correlações  $\sigma_{xp}$  que apresentam um ponto de mínimo e um ponto de máximo. Para os parâmetros citados acima, calculamos os pontos de mínimo e máximo das correlações e obtemos respectivamente,  $t_{min} = 0.49\tau_0$  e  $t_{max} = 1.36\tau_0$ .

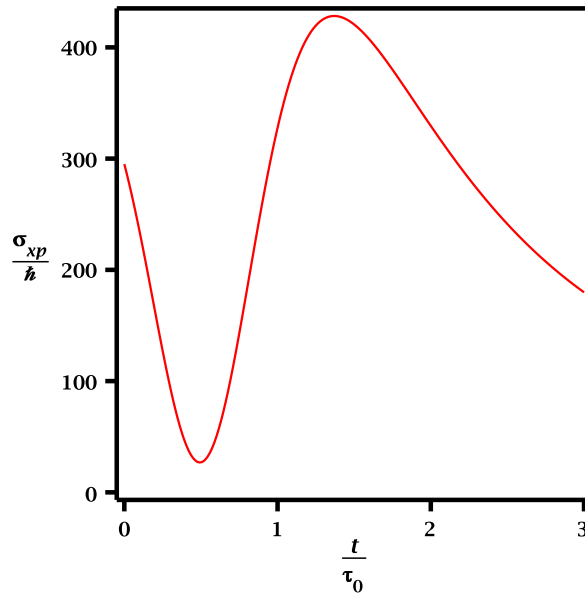


Figura 2 – Correlações  $\sigma_{xp}$  em função de  $t/\tau_0$  para  $\tau = 18\tau_0$  e  $\rho = -1$ .

Na figura 3, mostramos os gráficos da função de Wigner em função de  $x$  e  $k$  para os parâmetros de nêutrons citados acima. As figuras 3(a) e 3(b) mostram a função de Wigner que passa por uma única fenda. Na figura 3(a), esboçamos o gráfico da função de Wigner para o tempo no qual as correlações  $\sigma_{xp}$  são mínimas, na figura 3(b) mostramos a função de Wigner no qual essas correlações são máximas.

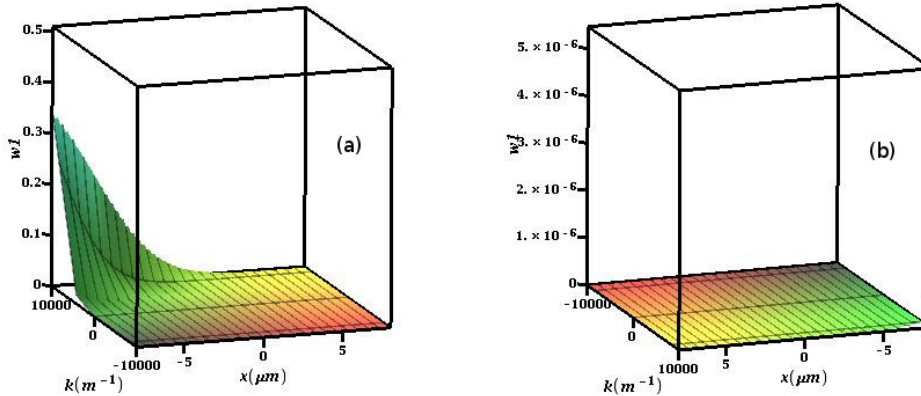


Figura 3 – Esboço da função de Wigner que passa por uma única fenda. (a) Temos a função de Wigner em função de  $x$  e  $k$  para o tempo no qual as correlações são mínimas. (b) Função de Wigner em função de  $x$  e  $k$  para o tempo no qual as correlações são máximas

Na figura 4, temos o esboço da função de Wigner no experimento de fenda dupla. Mostramos a função de Wigner em função de  $x$  e  $k$  para os parâmetros de nêutrons citados acima. Na figura 4(a), esboçamos o gráfico da função de Wigner para o tempo no qual as correlações  $\sigma_{xp}$  são mínimas, na figura 4(b) mostramos a função de Wigner no qual essas correlações são máximas. Percebemos que as correlações mínimas estão associadas, com a função de Wigner positiva e o máximo das correlações está associado com a função de Wigner negativa. De fato, a função de Wigner positiva é obtida apenas para o tempo  $t_{min}$ , o tempo para o qual as correlações  $\sigma_{xp}$  são mínimas, observamos que para qualquer tempo diferente do tempo de  $t_{min}$  a função de Wigner exibe parte negativa. Também observamos que o máximo da parte negativa ocorre para o tempo  $t_{max}$  tempo no qual as correlações  $\sigma_{xp}$  são máximas.

Portanto, uma única partícula, no experimento de fenda dupla, pode apresentar uma distribuição de Wigner na tela de detecção com diferentes comportamentos, dependendo das correlações  $\sigma_{xp}$  iniciais assim como de suas propriedades dinâmicas. As correlações nos tempos de mínimo e máximo são governadas, respectivamente, pelo primeiro e segundo termo da equação (3.8), por exemplo,  $\sigma_{xp}(t_{min}) \approx mB^2/2R$  e  $\sigma_{xp}(t_{max}) \approx mD^2/4R$ . Como podemos observar na figura 5, logo abaixo

Portanto temos as seguintes condições

$$B^2(t_{min}) \gg D^2(t_{min}), \quad D^2(t_{max}) \gg B^2(t_{max}). \quad (3.9)$$

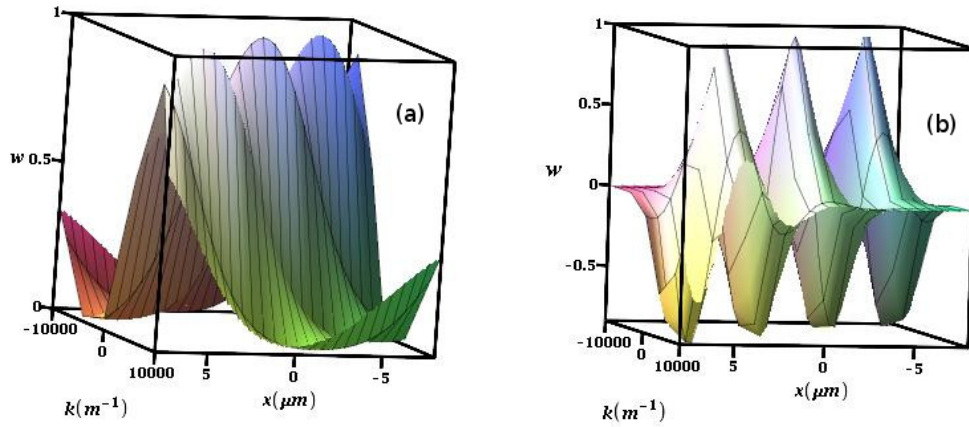


Figura 4 – Esboço da função de Wigner no experimento de fenda dupla. (a) Temos a função de Wigner em função de  $x$  e  $k$  para o tempo no qual as correlações são mínimas. (b) Função de Wigner em função de  $x$  e  $k$  para o tempo no qual as correlações são máximas

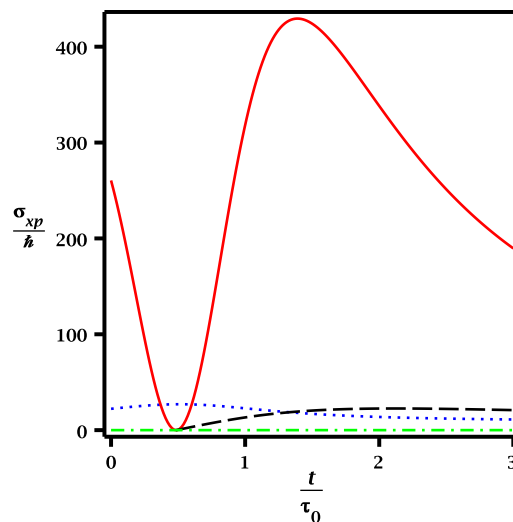


Figura 5 – Contribuição de cada termo das correlações  $\sigma_{xp}$ , valor do primeiro termo linha (pontilhada), segundo linha (sólida), terceiro linha (tracejada) e quarto linha (tracejada-ponto), como podemos ver as correlações nos tempos de mínimo e máximo são governadas, respectivamente pelo primeiro e o segundo termo da equação (3.8)

Onde  $B(t, \tau)$  é a largura do pacote de onda e  $D(t, \tau)$  é a separação entre os pacotes de ondas no anteparo, a região de overlap entre os dois pacotes é maior quando as correlações são mínimas do que quando as correlações são máximas. Quando aplicamos, as condições (3.9) nos termos da equação (3.3), observamos que o termo de interferência tem maior contribuição na função de Wigner do que os termos  $W_1(x, k, t)$  e  $W_2(x, k, t)$ . Por outro lado, os termos  $W_1(x, k, t)$  e  $W_2(x, k, t)$  contribuem mais para a função de Wigner no tempo de mínimo, das correlações  $\sigma_{xp}$  do que para o tempo de máximo de tal maneira que eles podem ser negligenciados na expressão da função de Wigner. Como podemos observar na figura 6, logo abaixo, mostramos os gráficos para os termos  $w_1 + w_2$  e para o termo de interferência, correspondente ao tempo mínimo e máximo das correlações, para termos uma melhor análise dos termos da equação (3.3). Temos

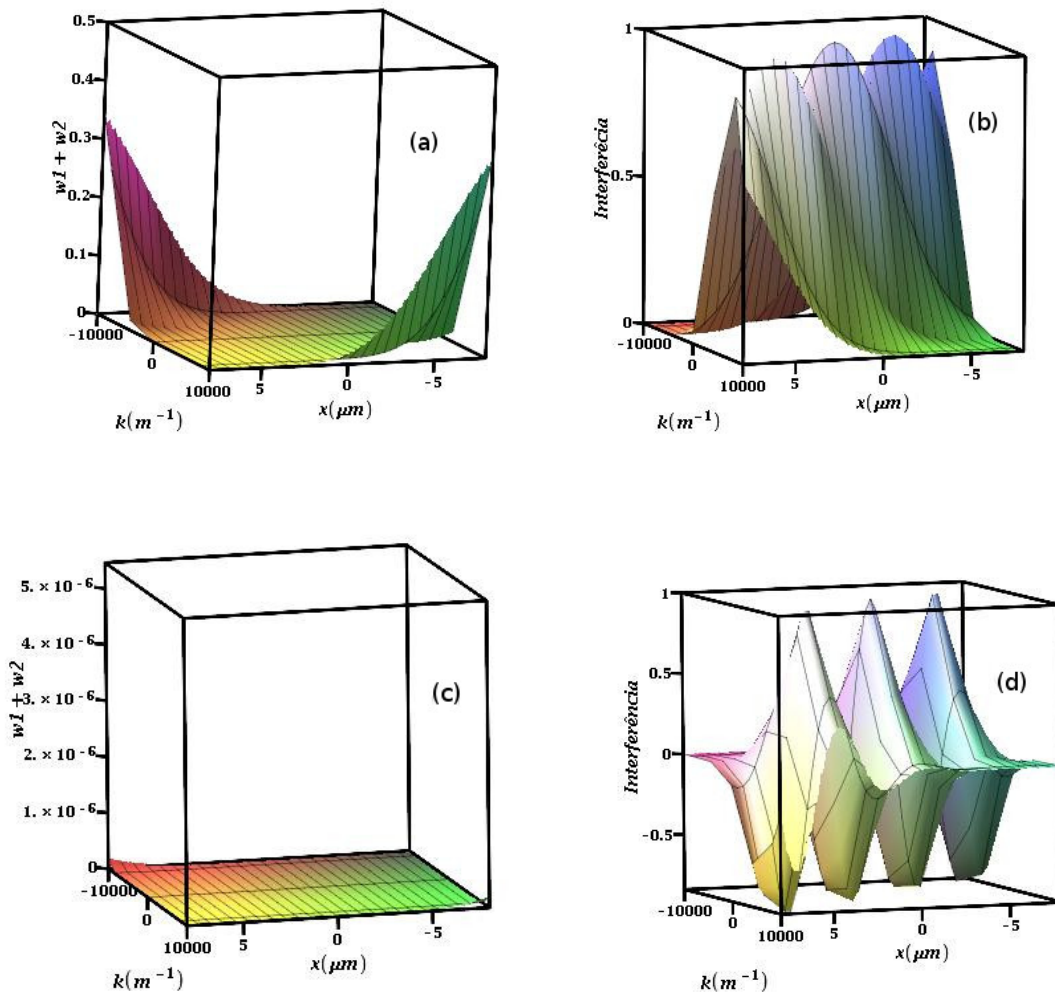


Figura 6 – Função de Wigner em função de  $x$  e  $k$ . (a) Consideramos apenas os termos  $w_1 + w_2$  da equação (3.3) para o tempo no qual as correlações são mínimas. (b) Levamos em consideração apenas o termo de interferência que é dado na equação (3.3) para o tempo no qual as correlações são mínimas. (c) Consideramos apenas os termos  $w_1 + w_2$  da equação (3.3) para o tempo no qual as correlações são máximas. (d) Levamos em consideração apenas o termo de interferência que é dado na equação (3.3) para o tempo no qual as correlações são máximas.

O estado com correlações mínimas, embora seja a superposição e duas funções gaussia-

nas, a função de Wigner resultante tem uma forma gaussiana exibindo apenas valores positivos e análogo ao estado original EPR para uma única partícula. Mostramos neste trabalho, que esses estados violam a desigualdade de Beel permitindo-nos demonstrar o carácter não local para uma única partícula assim como análogo ao estado original EPR com possibilidade de medida no experimento de fenda dupla. Para evidenciar o carácter não local, para uma única partícula, construímos no próximo capítulo a desigualdade de Bell.



---

## CORRELAÇÕES NÃO LOCAIS E DESIGUALDADE DE BELL

---

Apesar de proporcionar contribuições que foram fundamentais para o desenvolvimento da mecânica quântica, Einstein não concordava com algumas concepções dessa natureza. Embasado, pela perspectiva realista, acreditava na existência de uma realidade objetiva, isto é, algo que independente de qualquer observação ou subjetividade do indivíduo. Nesse sentido, os processos de medidas apenas revelavam os valores das grandezas físicas, preexistentes.

Em suas próprias palavras, Einstein em uma conversa com Abraham Pais teria perguntado: “Afinal, a Lua está lá quando não olhamos para ela?”. Tal paradigma, é uma forma de criticar a indeterminação do resultado antes de fazermos a medida. No entanto, a teoria quântica foi construída sobre uma linha de raciocínio completamente oposta ao da interpretação realista. Segundo a interpretação de Copenhague, o que existe são previsões estatísticas sobre o resultado da medida e não sobre algo previamente estabelecido. Antes da medida, o sistema encontra-se na superposição, em seguida, após realizarmos a medida a função de onda colapsa.

Estas características, não realistas, da Mecânica Quântica, fizeram com que em 1935, Einstein, Podolsky e Rosen (EPR), publicassem um artigo [1], no qual, argumentavam que a teoria quântica era uma teoria incompleta na descrição da "realidade" via função de onda. Nesse artigo, foi introduzido o conceito de localidade na mecânica quântica. Uma vez, que EPR acreditavam que a medida do estado de uma partícula feita, por exemplo, na Terra não pudesse afetar instantaneamente o estado outra realizada na Lua.

A ideia proposta por Einstein, Podolsky e Rosen, consiste num sistema composto por duas partículas que interagem em um dado instante de tempo, e depois é dividido em dois subsistemas (1,2) mantendo o momento linear conservado. Como podemos observar na figura 7.

Sendo respectivamente,  $p_1$  e  $p_2$  o momento das partículas 1 e 2 e, da mesma forma,  $x_1$  e  $x_2$  as respectivas posições das partículas, com  $a$  sendo distância de separação entre os

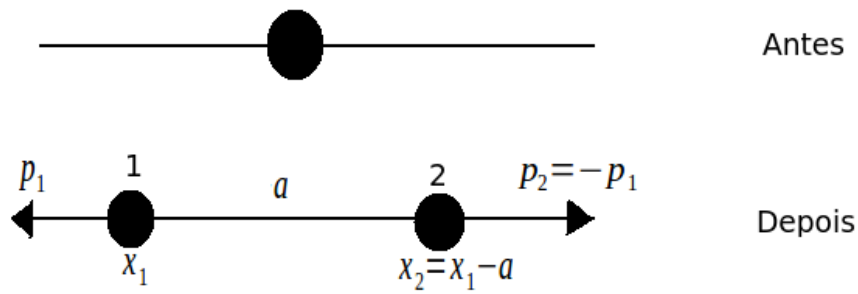


Figura 7 – Experimento mental EPR.

sub-sistemas, podemos escrever as equações:

$$P_{total} = p_1 + p_2, \tag{4.1}$$

$$X_{total} = x_1 - x_2. \tag{4.2}$$

Utilizando a relação de comutação, oriunda da teoria quântica,  $[x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}$ , podemos calcular o seguinte comutador

$$[X, P] = XP - PX = (x_1 - x_2)(p_1 + p_2) - (p_1 + p_2)(x_1 - x_2) = 0,$$

esse resultado mostra, que  $X$  e  $P$  poderiam ser medidos simultaneamente, contradizendo a teoria quântica. Nesse sentido, seria possível preparar o sistema de modo que seu estado poderia ser dado por:

$$|\psi\rangle = |P = 0, X = a\rangle, \tag{4.3}$$

onde  $a$  é uma distância conhecida. Assim, com uma medida da posição da partícula 2 digamos ( $x_2$ ), seria possível descobrir a posição da partícula 1, já que  $x_1 = x_2 + a$ . Da mesma forma, como  $p_1 = -p_2$  medindo o momento da segunda partícula, teremos o valor da primeira. Portanto, somos capazes de determinar de forma simultânea a posição, ( $x_1$ ), e o momento, ( $p_1$ ), da partícula 1. Partindo desse raciocínio, chega-se em uma inconsistência pois uma medida simultânea de duas variáveis canonicamente conjugadas é proibida na mecânica quântica. Tal assertiva, levou Einstein a crer que deveria existir variáveis ocultas,  $\lambda$ , necessárias para que o formalismo descrevesse o estado de um sistema por completo.

No entanto, em 1964 John S. Bell [3] descobriu uma incompatibilidade entre a mecânica quântica e a teoria de variáveis ocultas. Essa incompatibilidade entre a mecânica quântica e a teoria de variáveis ocultas. Ficou conhecida como desigualdade de Bell, que deve ser violado no caso da mecânica quântica ser válida. Diante disso, afirma-se que a teoria quântica prevê correções que não podem ser explicadas por teorias ditas locais.

A desigualdade de Bell representa um avanço significativo na compreensão dos fundamentos e conceitos da mecânica quântica. Muitos experimentos já foram realizados mostrando a violação da desigualdade de Bell. Recentemente B. Hensen et al realizaram um experimento mostrando a violação dessa desigualdade [8]. Uma vez que a desigualdade de Bell, pode ser encontrada para as correlações de spin e polarização de uma única partícula o mesmo deve ser verdadeiro para as correlações de outros observáveis tais como os operadores posição  $\hat{x}$  e momento  $\hat{p}$  como no artigo original EPR [1]. A fim de testar as correlações não locais existentes para estes observáveis, nesta seção, construímos a desigualdade de Bell, usando a função de Wigner para a função de onda que chega na tela de detecção no experimento de fenda dupla. Obtemos a violação da desigualdade de Bell para funções de Wigner com partes negativas bem como para funções de Wigner completamente positivas. Tal violação caracteriza a existência de correlações não locais entre observáveis posição e momento para uma única partícula. Definimos a função de correlação como em [45]. Consideramos as seguintes quatro combinações de  $x$  e  $k$ :  $x_1 = x_3$ ,  $x_2 = x_4 = x$ ,  $k_1 = k_2$  e  $k_3 = k_4 = k$ . Com estas quantidades construímos a combinação

$$B(t, x, k) = |W(x_1, k_1) + W(x, k_1)| + |W(x_1, k) - W(x, k)|, \quad (4.4)$$

que foi apontada como semelhante à desigualdade de Clauser, Horne, Shimony e Holt (CHSH) [46].

Construímos a desigualdade de Bell, para a função de Wigner que passa por uma única fenda. Com o proposito, de testar se as correlações não locais, existem para esta configuração.

$$B(t, x, k) = |W_1(x_1, k_1) + W_1(x, k_1)| + |W_1(x_1, k) - W_1(x, k)|, \quad (4.5)$$

portanto como podemos observar na figura 8, logo abaixo, a desigualdade de Bell não é violada quando consideramos a função de Wigner que passa por uma única fenda. Pois para qualquer valor de  $t$  a desigualdade (4.5) é sempre menor que 2.

Observamos os termos  $W_1(x, k)$  e  $W_2(x, k)$  na equação (3.3), podem ser negligenciados em comparação com o termo de interferência. Assim, o termo de interferência causa a violação da desigualdade de Bell caracterizando um efeito de emaranhamento. Foi mostrado, que a violação da desigualdade de BCHSH também é um efeito de interferência [47].

Na figura 9, mostramos a desigualdade de Bell em função de  $x$  e  $k$  para os parâmetros de nêutrons com  $x_1 = 1\mu m$  e  $k_1 = 10^3 m^{-1}$ . Na figura 9(a) temos a desigualdade de Bell para o tempo no qual as correlações entre posição e momento  $\sigma_{xp}$  são mínimas e na figura 9(b) mostramos a desigualdade de Bell que correspondente ao tempo em que as correlações são máximas, 9(c) mostramos que os termos  $W_1 + W_2$  da equação (3.3) são irrelevante na violação da

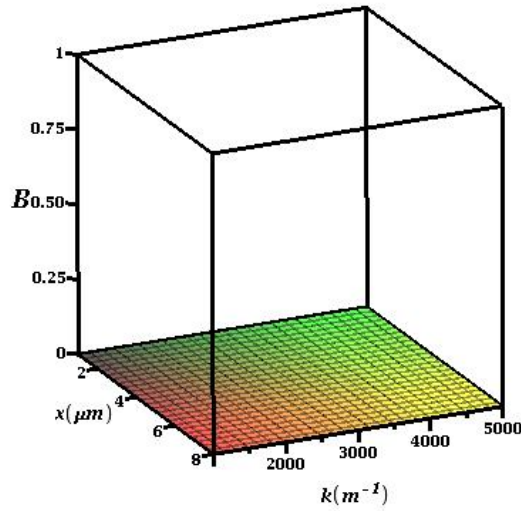


Figura 8 – Desigualdade de Bell para  $t_{max}$ , em função de  $x$  e  $k$  para a função de Wigner que passa por uma única fenda.

desigualdade de Bell, como podemos ver  $w_1 + w_2 \approx 0$ . Podemos perceber, que para o estado que correspondente ao tempo  $t_{max}$  temos uma maior violação da desigualdade de Bell para valores específicos de  $x$  e  $k$ , do que para o estado que corresponde ao tempo  $t_{min}$ . Também observamos que o valor mínimo da desigualdade de Bell para o estado quando o tempo é  $t_{min}$ , o estado original EPR é  $B \approx 2.19$ . O mesmo valor foi obtido em [22] usando outro sistema físico.

Portanto, estes resultados mostram o caráter não local para uma única partícula e nós permite definir um estado análogo ao estado original EPR para uma única partícula. Podemos observar que as partes positiva e negativa da função de Wigner violam a desigualdade de Bell e quanto mais negativa for a função de Wigner, maior será a violação da desigualdade de Bell. A violação máxima para o tempo mínimo, das correlações  $\sigma_{xp}$  é  $B \approx 2.19$  e para o tempo máximo das correlações  $\sigma_{xp}$  é  $B \approx 2.59$ . Como podemos observar na figura 7 (a) e 7 (b) que acontece a violação da desigualdade de Bell, e 7(c) onde a desigualdade não é violada, logo abaixo

A desigualdade de Bell, é um resultado da interferência no experimento de fenda dupla que é uma consequência das propriedades ondulatórias. Como a função de Wigner pode ser medida experimentalmente, os resultados acima pode ser testados experimentalmente sem muitas dificuldades. Assim, estes resultados podem ser usados para mostrar a não localidade associada a observáveis com uma única partícula, bem como, esclarecer uma velha discussão sobre a violação da desigualdade de Bell para o estado original EPR. A analogia do estado EPR, para duas partículas, foi tratada anteriormente considerando a interação átomo campo, embora a violação da desigualdade de Bell não foi construída para este sistema [41].

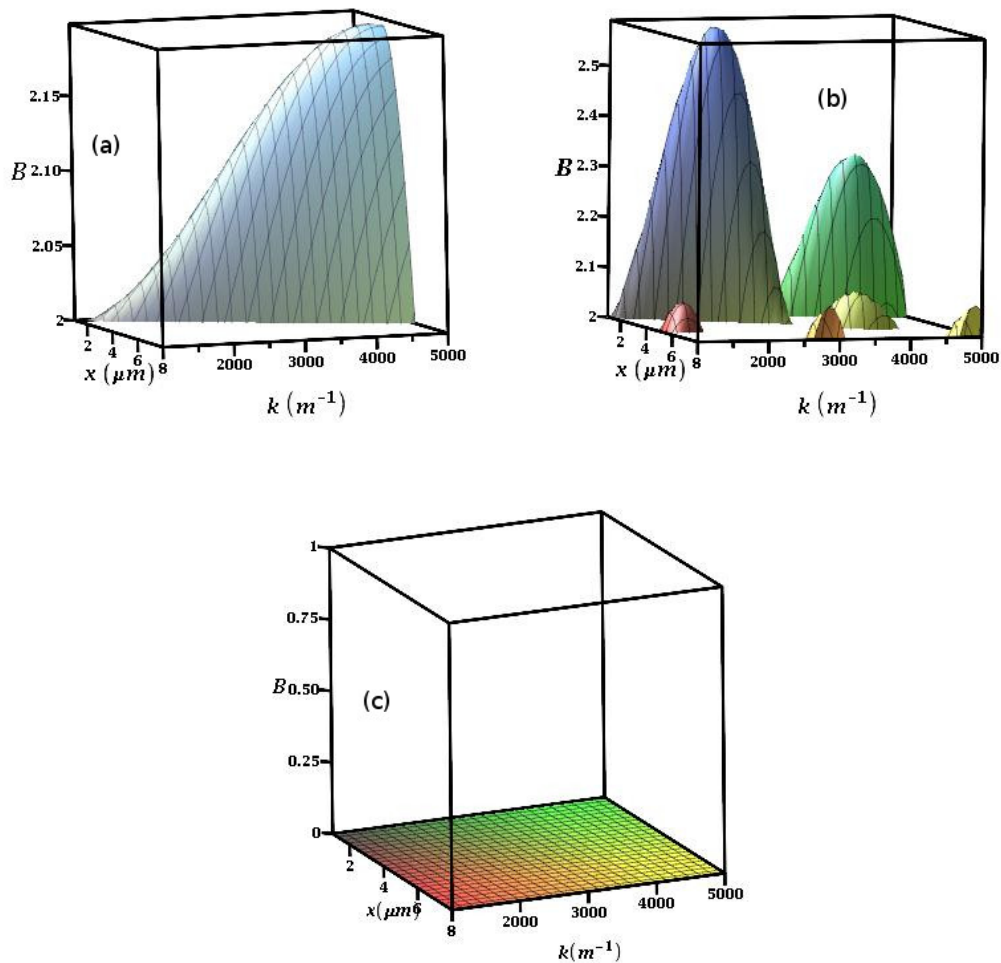


Figura 9 – Desigualdade de Bell, em função de  $x$  e  $k$ . (a) Desigualdade de Bell para  $t_{min}$ . A violação máxima é  $B \approx 2.19$ . (b) Desigualdade de Bell para  $t_{max}$ . A violação máxima é  $B \approx 2.59$ . Mostramos apenas, valores que excedem o limite imposto pelas teorias locais. (c) Mostramos que os termos  $w_1 + w_2$  da equação (3.3) são irrelevantes na violação da desigualdade de Bell, como podemos ver  $w_1 + w_2 \approx 0$

## 4.1 Relação de Incerteza de Schrödinger

O princípio de incerteza é uma característica básica da física quântica. Revela a diferença fundamental entre as descrições quânticas e clássicas da natureza. O princípio da indeterminação foi introduzido em 1927 por Heisenberg, que demonstra a impossibilidade de uma medição precisa simultânea dos observáveis posição  $\hat{x}$  e momento  $\hat{p}$ . Quanto mais precisamente for a posição determinada, menor será o momento conhecido. Em 1930, poucos anos depois de Heisenberg, Robertson-Schrödinger generalizou a famosa relação de incerteza da mecânica quântica.

$$\sigma_{xx}^2 \sigma_{pp}^2 - \sigma_{xp}^2 \geq \frac{\hbar^2}{4}. \quad (4.6)$$

Para o estado dado na equação (3.2), calculamos as incertezas em posição  $\sigma_{xx}$  e momento  $\sigma_{pp}$ , e obtemos os seguintes resultados

$$\sigma_{xx}^2(t, \tau) = \frac{B^2}{2} + \frac{D^2 - 4\Delta^2 B^4 \exp\left[-\frac{D^2}{4B^2} - \Delta^2 B^2\right]}{4 + 4 \exp\left[-\frac{D^2}{4B^2} - \Delta^2 B^2\right]}, \quad (4.7)$$

$$\frac{\sigma_{pp}^2(t, \tau)}{\hbar^2} = \left( \frac{1}{2B^2} + \frac{m^2 B^2}{2\hbar^2 R^2} \right) + \frac{\left(\frac{mD}{\hbar R} - 2\Delta\right)^2}{4 + 4 \exp\left[-\frac{D^2}{4B^2} - \Delta^2 B^2\right]} - \frac{\left[\frac{D^2}{B^4} + 2\Delta\left(\Delta + \frac{mD}{\hbar R}\right)\right]}{1 + \exp\left[-\frac{D^2}{4B^2} + \Delta^2 B^2\right]}, \quad (4.8)$$

Para estudar o comportamento das correlações junto com o comportamento das incertezas na posição e momento, calculamos o determinante da matriz de covariância definida por

$$\mathbf{M}_c = \begin{pmatrix} \sigma_{xx}^2 & \sigma_{xp} \\ \sigma_{xp} & \sigma_{pp}^2 \end{pmatrix}$$

onde  $\sigma_{xx}^2 = \langle \hat{x}^2 \rangle - \langle \hat{x} \rangle^2$ ,  $\sigma_{pp}^2 = \langle \hat{p}^2 \rangle - \langle \hat{p} \rangle^2$  são as variâncias quadráticas na posição e no momento,

O determinante da matriz de covariância é a relação de incerteza generalizada de Robertson-Schrödinger, as correlações não locais nos fornece informações sobre a posição e o momento da partícula, mais como podemos perceber a relação de incerteza é respeitada, veremos na figura 10, que o  $D_c > \hbar^2/4$ , para todo os tempos

$$D_C = \sigma_{xx}^2 \sigma_{pp}^2 - \sigma_{xp}^2. \quad (4.9)$$

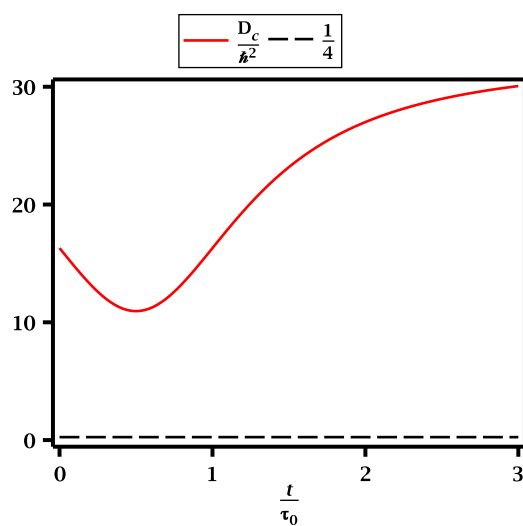


Figura 10 – Observamos que o determinante da matriz de covariância tende para o valor mínimo  $D_c \approx 11\hbar^2$ , podemos observar que  $D_c > \hbar^2/4$ , para todos os tempos.

---

## CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

---

Mostramos que as correlações entre posição e momento  $\sigma_{xp}$ , na tela de detecção no experimento de fenda dupla, pode ser máximo e mínimo dependendo do tempo de evolução da fonte para a fenda dupla. Observamos que o mínimo das correlações só é possível se considerarmos o estado inicial contraído, por exemplo, o estado com coeficiente de correlação negativo. Observamos que existe uma conexão entre as correlações  $\sigma_{xp}$ , e as partes positiva e negativa da função de Wigner. O mínimo das correlações está associada com o valor positivo da função de Wigner. Observamos também que valores diferentes do ponto de mínimo das correlações estão associados com o valor negativo da função de Wigner. O valor máximo da parte negativa da função de Wigner, corresponde ao valor máximo entre as correlações. Usamos a função de Wigner para construir a desigualdade de Bell para os observáveis posição e momento que não comutam. Portanto, mostramos o caráter não local para uma única partícula no experimento de fenda dupla. O parâmetro  $B = 2.59$  nos mostra a violação máxima para a desigualdade de Bell que é obtido quando a parte negativa da função de Wigner é máxima. Por outro lado, quando a parte positiva da função de Wigner é máxima a violação máxima para a desigualdade é  $B = 2.19$ . O caso da função de Wigner positiva é análogo ao estado original EPR para uma única partícula. Portanto, apresentamos resultados relacionados a não localidade dos observáveis posição e momento de uma única partícula que pode ser testado no experimento de fenda dupla.

Como perspectivas para próximos trabalhos pretendemos calcular outras quantidades físicas como intensidade, visibilidade e previsibilidade para estados gaussianos inicialmente correlacionados. Onde Analisaremos para quais valores de tempos, teremos a contribuição do parâmetro de correlação  $\rho$ .



---

## REFERÊNCIAS

---

---

- [1] B. Podolsky A. Einstein and N. Rosen. *Physical review*, **47**:777, 1935. Citado 3 vezes nas páginas 9, 24 e 26.
- [2] R. Horodecki J. Oppenheim A. Sen U. Sen M. Horodecki, P. Horodecki, B Synak-Radtke, et al. *Physical Review A*, **71**:062307, 2005. Citado na página 9.
- [3] John S Bell, 1965. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 25.
- [4] J. F. Clauser and A. Shimony. *Reports on Progress in Physics*, **41**:1881, 1978. Citado na página 9.
- [5] M. A. Rowe et al. *Nature*, **409**:791–794, 2001. Citado na página 9.
- [6] E. J. Galvez B. R. Gadway and F. De Zela. *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, **42**:015503, 2008. Citado na página 9.
- [7] G. Badurek M. Baron H. Y. Hasegawa, R. Loidl and Rauch. *Nature*, **425**:45–48, 2003. Citado na página 9.
- [8] B. Hensen et al. *Nature*, **526**:682–686, (2015). Citado 2 vezes nas páginas 9 e 26.
- [9] J. S Bell. *Speakable and unspeakable in quantum mechanics*. Cambridge University, 1987. Citado na página 9.
- [10] S. L. Braunstein and A. K. Pati. *Quantum information with continuous variables*. 2012. Citado na página 9.
- [11] Z-B. chen, G. Hou J-W. Pan, and Y-D. Zhang. *Physical review letters*, **88**:040406, (2002). Citado na página 9.
- [12] B. E. A. Saleh A. F. Abouraddy, T. Yarnall and M. C. Teich. *Physical Review A*, **75**:052114, (2007). Citado na página 9.
- [13] K. Wódkiewicz K. Banaszek, C. Radzewicz. *Physical Review A*, **60**:674, (1999). Citado na página 9.
- [14] G. Noguees others. *Physical Review A*, **62**:054101, (2000). Citado na página 9.
- [15] T. Aichele A. I. Lvovsky, H. Hansen et al. *Physical Review Letters*, **87**:050402, (2001). Citado na página 9.

- [16] J. H. Samson W. J. Munro T. Tilma, M. J. Everitt and K. Nemoto. *Physical review letters*, **117**:180401, (2016). Citado na página 9.
- [17] H. J. Kimble Z. Y. OU, S. F. Pereira and K. C. Peng. *Physical Review Letters*, **68**:3663, (1992). Citado na página 9.
- [18] S. F. Pereira Z. Y. Ou and H. J. Kimble. *Applied Physics B: Lasers and Optics*, **55**:265–278, (1992). Citado na página 9.
- [19] U. Leonhardt. *Physics Letters A*, **182**:195–200, (1993). Citado na página 9.
- [20] L. M. Johansen. *Physics Letters A*, 236:173–176, 1997. Citado na página 9.
- [21] O. Cohen. *Physical Review A*, **56**:3484, (1997). Citado na página 9.
- [22] K. Banaszek and K. Wodkiewicz. *Physical Review A*, **58**:4345, (1998). Citado 3 vezes nas páginas 9, 11 e 27.
- [23] Bohm D. 1963 (Prentice-Hall, Englewood Cliffs) pp. 200-205. Citado na página 10.
- [24] Saxon D S. 1968 (McGraw-Hill, New york) pp. 62-66. Citado na página 10.
- [25] M. A. Doncheski R. W. Robinett and L. C. Bassett. *Foundations of Physics Letters*, **18**:455–475, (2005). Citado na página 10.
- [26] Riahi Natascha. *European Journal of Physics*, **34**:461, (2013). Citado na página 10.
- [27] V. V. Dodonov. *Journal of Optics B Quantum and Semiclassical Optics*, **4**:R1, (2002). Citado na página 10.
- [28] V. V. Dodonov and A. V. Dodonov. *Journal. Russian Laser Resarch.*, **35**:39, (2014). Citado 2 vezes nas páginas 10 e 12.
- [29] L. A. Cabral J. S. M. Neto and I. G. da Paz. *European Journal of Physics*, **36**:035002, (2015). Citado 2 vezes nas páginas 10 e 16.
- [30] R. B. Leighton R. Feynman and M. L. Sands. *The Feynman Lectures on Physics: Quantum mechanics*, volume 3. (1965). Citado na página 10.
- [31] G. Möllenstedt and C. Jönsson. *Zeitschrift für Physik*, **155**:472–474, (1959). Citado na página 10.
- [32] C. G. Shull W. Treimer A. Zeilinger, R. Gähler and W. Mampe. *Reviews of modern physics*, **60**:1067, (1988). Citado na página 10.
- [33] O. Carnal and J. Mlynek. *Physical review letters*, **66**:2689, (1991). Citado na página 10.

- [34] S-H Liou R. Bach, D. Pope and H. Batelaan. *New Journal of Physics*, **15**:033018, (2013). Citado na página 10.
- [35] G. C. Gazzadi S. Frabboni and G. Pozzi. *American Journal of Physics*, **79**:615–618, (2011). Citado na página 10.
- [36] G. Glionna et al. *Physica A*, **387**:1485–1490, (2008). Citado na página 16.
- [37] E. Wigner. *Physical review*, **40**(749), (1932). Citado na página 17.
- [38] S. Chountasis and A. Vourdas. *Physical Review A*, **58**:1794, (1998). Citado na página 17.
- [39] V. I. Manko V. V. Dodonov and O. V. Manko. *Physical Review A*, **50**:813, (1994). Citado na página 17.
- [40] A. Kenfack and Zyczkowski. *Journal of Optics B*:, **6**:396, (2004). Citado na página 17.
- [41] M. Collett D. P. Storey, T. Sleator and Walls. *Physical Review A*, **49**:2322, 1994. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 27.
- [42] H. Rauch P. B. Lerner and M. Suda. *Physical Review A*, **51**:3889, (1995). Citado na página 18.
- [43] A. S. Sanz and F. Borondo. *Physical Review A*, **71**:042103, 2005. Citado na página 19.
- [44] C. G. Shull W. Treimer A. Zeilinger, R. Gähler and W Mampe. *Reviews of modern physics*, **60**:1067, 1988. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 19.
- [45] S. M. Barnett E. Andersson and A. Aspect. *Physical Review A*, **72**:042104, 2005. Citado na página 26.
- [46] A. Shimony J. F. Clauser, M. A. Horne and R. A. Holt. *Physical review letters*, **23**:880, 1969. Citado na página 26.
- [47] T. Isobe and S. Tanimura. *Progress of Theoretical Physics*, **124**:191–205, (2010). Citado na página 26.