Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT

Uso de Conjuntos no Ensino de Lógica Matemática Básica

Anailton Veras Sotero

Parnaíba - 2016

Anailton Veras Sotero

Dissertação de Mestrado:

Uso de Conjuntos no Ensino de Lógica Matemática Básica

Dissertação submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:
Prof. Me. Cleyton Natanael Lopes de Carvalho Cunha

Parnaíba - 2016

PROFMAT

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
CENTRO DE EDUCAÇÃO ABERTA E À DISTÂNCIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

SBM

Dissertação de Mestrado submetida à coordenação Acadêmica Institucional, na Universidade Federal do Piauí, do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional para obtenção do grau de **mestre em matemática** intitulada: USO DE CONJUNTOS NO ENSINO DE LÓGICA MATEMÁTICA BÁSICA, defendida por ANAILTON VERAS SOTERO em 30/08/2016 e aprovada pela banca constituída pelos professores:

Cleyton Natanael Lopes de Carvalho Cunha

Prof. Msc. Cleyton Natanael Lopes de Carvalho Cunha
Presidente da Banca Examinadora

Marcelo de Oliveira Rêgo

Prof. Msc. Marcelo de Oliveira Rêgo - Examinador

Kécia Silva Araujo

Prof.ª Msc. Kécia Silva Araújo – Examinadora Externa

FICHA CATALOGRÁFICA
Universidade Federal do Piauí
Biblioteca Setorial Prof. Cândido Athayde – Campus Parnaíba
Serviço de Processamento Técnico

S717u Sotero, Anailton Veras.
Uso de conjuntos no ensino de lógica matemática básica [manuscrito] / Anailton Veras Sotero. – 2016.
56 f. : il.

Impresso por computador (printout).
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal do Piauí, 2016.
Orientação: Prof. Me. Cleyton Natanael Lopes de Carvalho Cunha

1. Conjuntos - Matemática. 2. Lógica Matemática - Proposta de Ensino. I. Titulo.

CDD: 511.3

Dedico este trabalho aos meus pais Antonia e Antonio, aos meus irmãos Adeilton e Nayrlane, aos meus filhos Raissa e Samuel e a minha esposa Elaine.

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus por sempre iluminar meus caminhos e decisões na vida. Só tenho que agradecer, todos os dias.

À minha esposa Elaine Cristina Sousa Sotero, grande companheira que soube tolerar minhas irritações e estresses nos momentos mais difíceis durante todo esse tempo de mestrado e contribuiu bastante, ajudando-me muito.

À toda minha família, minha "força-motriz", razão pela qual passei tudo que passei nesse longo período do mestrado.

Aos meus pais Antonio da Mota Sotero (falecido) e Antonia Veras Sotero, que me deram, e muito bem, o melhor presente de todos: a educação, portanto, a oportunidade de ser alguém na vida. Tenho muito orgulho deles!

Aos meus irmãos Adeilton Veras Sotero e Nayrlane Veras Sotero, que sempre torceram e torcem por mim.

À minha sogra Joana D'arc de Sousa, que sempre me ajudou no que pôde e sempre comemorou minhas conquistas.

Ao meu orientador, Prof. Me. Cleyton Natanael, ao qual sou muito grato, pois sem ele todo este trabalho não seria possível.

Aos meus professores do PROFMAT, pela dedicação e empenho em compartilharem seus conhecimentos.

A todos os colegas da turma do PROFMAT-2014, pelos muitos momentos que estivemos juntos estudando e pelas amizades conquistadas, afinal, é o que vale a pena!

À SBM (Sociedade Brasileira de Matemática), pela excelente iniciativa de promover um mestrado voltado para professores da Educação Básica. E a todos que direta ou indiretamente contribuíram para a elaboração e conclusão deste trabalho.

"Há uma força motriz mais poderosa que o vapor, a eletricidade e a energia atômica: a vontade.".

Albert Einstein.

Resumo

Este trabalho teve como objetivo apresentar a Lógica Matemática Básica sob a ótica de Conjuntos visando facilitar o ensino da mesma no Ensino Médio. A metodologia desenvolvida foi inicialmente a pesquisa exploratória e o método dedutivo. Apresenta-se os conceitos relacionados a Lógica Matemática e Conjuntos, e buscou-se uma interação entre os mesmos visando facilitar o raciocínio lógico matemático. Conclui-se nosso estudo com uma proposta de atividades, com soluções, para ser utilizada no ensino básico visando contribuir para a melhoria do ensino de matemática, corroborando para boa formação do aluno concluinte do ensino médio na rede pública de ensino.

Palavras-chave: Conjuntos; Lógica; Proposta de Ensino.

Abstract

This study intents to present the Basic Mathematical Logic under the perspective of Sets, aiming to facilitate the teaching of it in high school. The used methodologies were initially the exploratory research and the deductive method. We present the concepts related to mathematical logic and sets, and we sought an interaction between them to facilitate the mathematical logical reasoning. We conclude our study with a proposal of activities, and solutions, to be used in basic education to contribute to improving the teaching of mathematics, corroborating good training of the graduating high school student in the teaching public system.

Keywords: Sets. Logic. Teaching Proposal.

Conteúdo

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Introdução

A questão principal que deu origem ao problema desse estudo consiste na observação do currículo do ensino médio que não traz em seu bojo o conteúdo de lógica, apesar de ser bastante cobrado em concursos públicos de nível médio e apresentada em algumas questões do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM).

Observa-se também que esse conteúdo só é ofertado em cursos preparatórios para concursos. O fato é que outrora esse conteúdo estava contido em publicações de autores como [8] publicada em 2006, enquanto que na publicação de 2010 do mesmo autor, confira em [9], esse conteúdo já se encontra suprimido ao modelo de outros autores como [10] adotado atualmente nas escolas públicas de ensino médio no estado do Piauí.

Percebe-se que, desse modo esse conteúdo de lógica é contemplado exclusivamente em cursinhos preparatórios, deixando uma lacuna considerável na formação do aluno de ensino médio da rede pública, que ao prestar um concurso necessita buscar auxílio em tais "cursinhos". Desse modo, apresenta-se a proposta desse estudo de inserir o conteúdo de lógica matemática básica por meio de resoluções de problemas fazendo relação com o conteúdo de conjuntos que serão descritos no Capítulo 3.

Na elaboração desse estudo busca-se desenvolver uma metodologia que inicialmente pautou-se na pesquisa exploratória que não requer formulação de hipótese para serem testadas, mas define um objetivo e busca mais informações sobre determinado assunto de estudo, ver [2]. Assim, o método utilizado foi o dedutivo que sendo um método racionalista, propõe uma única forma de chegar ao conhecimento verdadeiro, utilizando cadeia de raciocínio descendente da análise geral para o particular até a conclusão. Veja o exemplo do silogismo: de duas premissas retira-se uma terceira logicamente decorrente.

Todo homem é mortal. (premissa maior)

Pedro é homem. (premissa menor)

Logo, Pedro é mortal. (conclusão)

Esse silogismo caracteriza esse estudo pelo modo de utilizar o método descrito por meio dos capítulos sequenciados, onde aplica-se o conteúdo de Conjuntos e em seguida o conteúdo de Lógica Matemática Básica para chegar a uma proposição de atividades utilizando ambos os conteúdos.

Espera-se que, por meio da interação entre esses dois importantes conteúdos matemáticos, o aluno possa desenvolver a capacidade de raciocinar matematicamente de modo a usar de forma eficaz a Matemática em suas diversas aplicações bem como na própria compreensão da mesma. Nesse sentido, este trabalho foi dividido em três capítulos descritos a seguir.

No Capítulo 1 foram apresentados os principais conceitos lógicos, tais como o de negação, conjunção, disjunção, condicionais e os quantificadores lógicos. Também expomos as definições de implicação e equivalência lógica através da construção de tabelas-verdades.

No Capítulo 2 foram apresentados os conceitos básicos de conjuntos, bem como suas propriedades e aplicações. Os Capítulos 1 e 2 tem o objetivo apenas de fixar conceitos e notações bem como algumas propriedades básicas de forma a deixar o trabalho autossuficiente. No Capítulo 3 foi de fato realizada a proposta de atividades que consiste em estabelecer equivalências entre os conceitos relativos a conjuntos e os conectivos lógicos, além de propor resoluções de problemas interessantes de lógica resolvidos na linguagem de conjuntos, onde espera-se que tal proposta proporcione condições para o professor apresentar a Lógica Matemática de forma mais simples contornando na medida do possível a abstração das tabelas verdades. Por fim, seguem as considerações finais.

Capítulo 1

Lógica Matemática Básica

Neste capítulo será feita uma exposição dos fundamentos básicos da Lógica Matemática. Mas porque é importante estudar Lógica? O aprendizado da Lógica auxilia o raciocínio, a compreensão de conceitos básicos, a verificação formal de programas e prepara o aluno para o entendimento de tópicos mais avançados. Deseja-se através deste trabalho incentivar o ensino de lógica matemática básica no ensino fundamental e médio, pois apesar desse ramo da matemática não ser muito presente no currículo do ensino médio, é muito cobrado nos concursos públicos de nível médio e até mesmo no Exame Nacional do Ensino Médio(ENEM) com questões de argumentação lógica.

A lógica está de tal modo incrustada na matemática que às vezes ambas se fundem numa só estrutura. A matemática necessita da lógica para suas definições postulados e teoremas.

1.1 Primeiros Conceitos

O conceito mais elementar no estudo da lógica, e portanto o primeiro a ser visto é o de Proposição.

Definição 1.1.1 (Proposição)**.** *Chama-se proposição todo encadeamento de termos, palavras ou símbolos que expressa um pensamento de sentido completo cabível de ser julgado,* ***valorado****, em* ***verdadeiro*** *ou* ***falso****. Esta valoração também é chamada de valor lógico ou valor verdade. Dentro deste conceito, toda afirmação é uma proposição.*

Então, se ao afirmar *"a Terra é maior que a Lua"*, obtém-se uma proposição, cujo valor lógico é verdadeiro. Daí, ficou claro que quando se fala em **valor lógico**, faz-se referência a um dos dois possíveis juízos que atribuiremos a uma proposição: verdadeiro (V) ou falso (F). E se alguém disser: *"Feliz ano novo!"*, será que isso é uma proposição verdadeira ou falsa? Nenhuma, pois não se trata de uma sentença para a qual se possa atribuir um valor lógico. Concluímos, pois, que...

(i) sentenças exclamativas: *"Caramba!"; "Feliz aniversário!"*

(ii) sentenças interrogativas: *"Como é o seu nome?" ; "O jogo foi de quanto?"*

(iii) sentenças imperativas: *"Estude mais." ; "Leia aquele livro".*

... não serão estudadas neste capítulo. Somente aquelas primeiras sentenças declarativas que podem ser imediatamente reconhecidas como verdadeiras ou falsas.

Normalmente, as proposições são representadas por letras minúsculas (p, q, r, s etc). São outros exemplos de proposições, as seguintes:

Exemplo 1.1.1. *Exemplo de proposições:*

(a) p: Pedro é médico.

(b) q: $5 < 8$

(c) r: Luíza foi ao cinema ontem à noite.

Na linguagem do raciocínio lógico, ao afirmar que é verdade que Pedro é médico (proposição p acima), representa-se isso apenas com: VL(p) = V, ou seja, o valor lógico de p é verdadeiro. No caso da proposição q , que é falsa, diz-se que VL(q) = F. Haverá alguma proposição que possa, ao mesmo tempo, ser verdadeira e falsa? A resposta para essa pergunta é negativa, pois a Lógica Matemática está sedimentada sobre alguns princípios.

(i) Uma proposição verdadeira é verdadeira; uma proposição falsa é falsa. *(Princípio da identidade)*;

(ii) Nenhuma proposição poderá ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo. *(Princípio da Não-Contradição)*;

(iii) Uma proposição ou será verdadeira, ou será falsa: não há outra possibilidade. *(Princípio do Terceiro Excluído).*

Proposições podem ser ditas *simples* ou *compostas*. Serão proposições *simples* aquelas que vêm sozinhas, desacompanhadas de outras proposições.

Exemplo 1.1.2. *Proposições simples*

(a) Todo homem é mortal.

(b) O novo papa é alemão.

(c) 2 *é um número primo.*

Todavia, se duas (ou mais) proposições vêm conectadas entre si, formando uma só sentença, tem-se uma proposição *composta*.

Exemplo 1.1.3. *Proposições compostas*

(a) João é médico **e** *Pedro é dentista.*

(b) Maria vai ao cinema ***ou*** *Paulo vai ao circo.*

(c) ***Ou*** *Luís é baiano,* ***ou*** *é paulista.*

(d) ***Se*** *chover amanhã de manhã,* ***então*** *não irei à praia.*

(e) Comprarei uma mansão ***se, e somente se*** *eu ganhar na loteria.*

Nas sentenças acima, vimos em destaque os vários tipos de conectivos ditos **conectivos lógicos** que poderão estar presentes em uma proposição composta. Cada um deles será estudado a seguir, uma vez que é interessante conhecer o **valor lógico** das *proposições compostas*. Será visto que, para dizer que uma proposição composta é verdadeira ou falsa, isso dependerá de duas coisas: 1º) do valor lógico das proposições componentes; e 2º) do tipo de conectivo que as une.

1.2 Operações Lógicas - Conectivos

Alguns resultados e citações apresentados nessa seção seguem das referências [1] e [4].

1.2.1 Conectivo "e" (Conjunção)

Definição 1.2.1 (Conjunção)**.** *Chama-se conjunção de duas proposições p e q a proposição representada por "p e q", cujo valor lógico é verdade(V) quando as proposições p e q são ambas verdadeiras e a falsidade(F) nos demais casos.*

Simbolicamente, esse conectivo "**e**" pode ser representado por $\wedge$. Então, diante da sentença:

"Marcos é médico **e** Maria é estudante",

pode-se representar apenas por: $\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}$ onde: p = Marcos é médico e q = Maria é estudante.

Então, diante da sentença "Marcos é médico e Maria é estudante", pode-se concluir que esta proposição composta é verdadeira se for verdade, ao mesmo tempo, que Marcos é médico e que Maria é estudante.

Pensando pelo caminho inverso, tem-se que basta que uma das proposições componentes seja falsa, e a conjunção será toda ela falsa. Obviamente que o resultado falso também ocorrerá quando ambas as proposições componentes forem falsas.

Essas conclusões todas as quais acaba-se de chegar podem ser resumidas em uma pequena tabela. Trata-se da **tabela-verdade**, de fácil construção e de fácil entendimento.

Retornando às premissas:

p = Marcos é médico e q = Maria é estudante.

Analisando todos os possíveis resultados do valor lógico da conjunção, monta-se a seguinte tabela-verdade:

Tabela 1.1: Tabela verdade da conjunção.

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Fonte: O Autor.

É preciso que a informação constante da terceira coluna (em destaque) fique guardada na memória: *uma conjunção só será verdadeira, quando ambas as partes que a compõem também forem verdadeiras. E falsa nos demais casos.*

Uma maneira de assimilar bem essa informação seria pensar nas sentenças simples como promessas de um pai a um filho: “Eu te darei uma bola e te darei uma bicicleta”. Qualquer criança entenderia que a promessa é para os dois presentes. Caso o pai não dê nenhum presente, ou dê apenas um deles, a promessa não terá sido cumprida. Terá sido falsa. No entanto, a promessa será verdadeira se as duas partes forem também verdadeiras.

1.2.2 Conectivo “ou”: (disjunção)

Definição 1.2.2 (Disjunção)**.** *Recebe o nome de disjunção toda proposição composta em que as partes estejam unidas pelo conectivo* ***ou****.*

Simbolicamente, esse conectivo será representado por “$\vee$”. Portanto, seja a sentença:

“Marcos é médico **ou** Maria é estudante”,

então representa-se por: $p \vee q$.

Para criar uma tabela-verdade para a proposição disjuntiva citada acima, basta analisar tal promessa do pai para seu filho. Veja: “Eu te darei uma bola **ou** te darei uma bicicleta”. Neste caso, a criança já sabe, de antemão, que a promessa é por apenas um dos presentes, Bola **ou** bicicleta. Ganhando de presente apenas um deles, a promessa do pai já foi cumprida, já foi verdadeira. E se o pai for resolver dar os dois presentes, a promessa foi mais do que cumprida. Só haverá um caso, todavia, em que a bendita promessa não se cumprirá: se o pai esquecer o presente, e não der nem a bola e nem a bicicleta. Terá sido falsa toda a disjunção.

Daí, conclui-se: *uma disjunção será falsa quando as duas partes que a compõem forem ambas falsas. E nos demais casos, a disjunção será verdadeira.* Tem-se as possíveis situações:

A promessa inteira só é falsa se as duas partes forem descumpridas!

Observa-se que as duas primeiras colunas da tabela-verdade acima as colunas do **p** e do **q** são exatamente iguais às da tabela-verdade da conjunção (p **e** q). Muda apenas a terceira coluna, que agora representa um **“ou”**, a disjunção.

Tabela 1.2: Tabela verdade da disjunção.

p	q	p $\vee$ q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Fonte: O Autor.

1.2.3 Conectivo "ou ... ou...": (disjunção exclusiva)

Há um terceiro tipo de proposição composta, bem parecido com a disjunção, mas com uma pequena diferença. Observe as duas sentenças abaixo:

"Te darei uma bola ou te darei uma bicicleta."

"Ou te darei uma bola ou te darei uma bicicleta"

A diferença é sutil, mas importante. Observa-se que na primeira sentença vê-se facilmente que se a primeira parte for verdade (te darei uma bola), isso não impedirá que a segunda parte (te darei uma bicicleta) também o seja. Já na segunda proposição, se for verdade que "te darei uma bola", então teremos que não será dada a bicicleta. E vice-versa, ou seja, se for verdade que "te darei uma bicicleta", então tem-se que não será dada a bola.

Ou seja, a segunda estrutura apresenta duas situações mutuamente excludentes, de sorte que apenas uma delas pode ser verdadeira, e a restante será necessariamente falsa.

Ambas nunca poderão ser, ao mesmo tempo, verdadeiras; ambas nunca poderão ser, ao mesmo tempo, falsas.

Na segunda sentença acima, este tipo de construção é uma disjunção exclusiva, pela presença dos dois conectivos "ou", que determina que uma sentença é necessariamente verdadeira, e a outra, necessariamente falsa. Daí, o nome completo desta proposição composta é **disjunção exclusiva**.

Uma disjunção exclusiva só será verdadeira se obedecer à mútua exclusão das sentenças,ou seja, só será verdadeira se houver uma das sentenças verdadeira e a outra falsa. Nos demais casos, a disjunção exclusiva será falsa.

O símbolo que designa a disjunção exclusiva é o "$\veebar$". E a tabela-verdade será, pois, a seguinte:

Tabela 1.3: Tabela verdade da disjunção exclusiva.

p	q	p $\veebar$ q
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Fonte: O Autor.

1.2.4 Conectivo "Se ... então...": (condicional)

Definição 1.2.3 (Condicional). *Chama-se proposição condiconal ou apenas condicional uma proposição representada por "se p então q", cujo valor lógico é falsa(F) no caso em que p é verdadeira e q falsa e a verdade(V) nos demais casos.*

Simbolicamente, a condicional de duas proposições p e q indica-se com a notação: "$\mathsf{p} \rightarrow \mathsf{q}$", que também se lê de uma das seguintes maneiras:

(i) p é condição suficiente para q

(ii) q é condição necessária para p

As proposições a seguir são exemplos de condicionais:

Se Pedro é médico, então Maria é dentista.
Se amanhecer chovendo, então não irei à praia.

Para facilitar o entendimento desse tipo de proposição, convém usar a seguinte sentença como exemplo.

"João nasceu em Parnaíba, então ele é piauiense".

A única forma dessa proposição ser falsa é se a primeira parte for verdadeira, e a segunda for falsa.

Ou seja, se é verdade que eu João nasceu em Parnaíba, então necessariamente é verdade que João seja piauiense.

Ao contrário disso se é verdadeiro que João nasceu em Parnaíba, e que é falso que eu ele seja piauiense, então este conjunto estará todo falso.

Observa-se que o fato de João ter nascido em Parnaíba é condição **suficiente** para que se torne um resultado **necessário** que ele seja piauiense.

O valor lógico da condicional de duas proposições é, portanto, definido pela seguinte tabela-verdade:

Tabela 1.4: Tabela verdade da condicional.

p	q	p → q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Fonte: O Autor.

1.2.5 Conectivo "... se e somente se ...": (bicondicional)

A estrutura dita bicondicional apresenta o conectivo "se e somente se", separando as duas sentenças simples.

Trata-se de uma proposição de fácil entendimento. Veja a sentença:

"Eduardo fica alegre **se e somente se** Mariana sorri".

É o mesmo que fazer a conjunção entre as duas proposições condicionais:

"Eduardo fica alegre **somente se** Mariana sorri **e** Mariana sorri **somente se** Eduardo fica alegre".

Ou ainda, dito de outra forma:

"Se Eduardo fica alegre, então Mariana sorri **e** se Mariana sorri, então Eduardo fica alegre".

São construções de mesmo sentido.

Sabendo que a bicondicional é uma conjunção entre duas condicionais, então a **bicondicional** será **falsa** somente quando os valores lógicos das duas proposições que a compõem forem diferentes. Em suma: haverá duas situações em que a bicondicional será verdadeira: quando antecedente e consequente forem ambos verdadeiros, ou quando forem ambos falsos. Nos demais casos, a bicondicional será falsa.

Definição 1.2.4 (Bicondicional)**.** *Chama-se bicondicional uma proposição representada por "p se e somente se q", cujo valor lógico é a verdade(V) quando p e q são ambas verdadeiras ou ambas falsas, e a falsidade(F) nos demais casos.*

Sabendo que a frase "p se e somente se q" é representada por "p $\leftrightarrow$ q", então nossa tabela-verdade será a seguinte:

Tabela 1.5: Tabela verdade da bicondicional.

p	q	p $\leftrightarrow$ q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Fonte: O Autor.

Uma proposição bicondicional "p se e somente se q" equivale à proposição composta: "se p então q e se q então p", ou seja,

$$\text{“p} \leftrightarrow \text{q” é a mesma coisa que “(p} \rightarrow \text{q) e (q} \rightarrow \text{p)”}$$

1.3 Quantificadores

Há expressões como:

$$\text{(i) } x + 1 = 7, \text{ (ii) } x > 2 \text{ e (iii) } x^3 = 2x^2$$

que contêm variáveis e cujo valor lógico (verdadeira ou falsa) vai depender do valor atribuído à variável.

Orações que contêm variáveis são chamadas *sentenças abertas*. Tais orações não são proposições pois seu valor lógico (V ou F) é discutível, dependem do valor dado às variáveis.

Há, entretanto, duas formas de transformar uma sentença aberta em uma proposição:

(i) atribuir valor às variáveis

(ii) utilizar quantificadores.

1.3.1 Quantificador Universal

O quantificador universal, usado para transformar sentenças abertas em proposições, é indicado pelo símbolo $\forall$, que se lê: "qualquer que seja", "para todo", "para cada".

Exemplo 1.3.1. *A proposição:* $(\forall x)(x+1=7)$, *que se lê: "qualquer que seja o número x, temos* $x+1=7$*", possui valor lógico falso.*

Exemplo 1.3.2. *Sendo* A *o conjunto de todos os estados do nordeste brasileiro e*

"$P(x) : x$ *é um estado do Brasil*"

a proposição aberta. Utilizando o quantificador universal, tem-se a proposição:

Para todo x *no conjunto* A*, x é um estado do Brasil.*

Simbolicamente a proposição é

$$\forall x \in A; P(x).$$

Observa-se que essa é uma proposição verdadeira, pois substituindo x *por qualquer estado do nordeste brasileiro, tem-se* $P(x)$ *com valor lógico verdadeiro.*

1.3.2 Quantificador Existencial

O quantificador existencial é indicado pelo símbolo $\exists$, que se lê: "existe", "existe pelo menos um", "existe um".

Exemplo 1.3.3. *A proposição:* $(\exists x)(x+1=7)$, *que se lê: "existe um número* x *tal que* $x+1=7$*". Tem valor lógico verdadeiro.*

Exemplo 1.3.4. *A proposição:* $(\exists n \in \mathbb{N})(n+5<3)$, *que se lê: "existe um número natural* n *tal que* $n+5$ *é menor que 3" é falsa.*

Algumas vezes utiliza-se também outro quantificador cujo símbolo é $\exists|$, que se lê: "existe um único", "existe um e um só", "existe só um".

Exemplo 1.3.5. *A proposição:* $(\exists|x)(x + 1 = 7)$, *que se lê: "existe um só número x tal que* $x + 1 = 7$*" é verdadeira.*

1.4 Partícula "não": (negação)

Definição 1.4.1 (Negação)**.** *Chama-se negação de uma proposição p a proposição representada por "não p", cujo valor lógico é a verdade(V) quando p é falsa e a falsidade(F) quando p é verdadeira.*

Assim, "não p" tem valor lógico oposto daquele de p.

O símbolo que representa a negação é uma pequena cantoneira ($\neg$) ou um sinal de til ($\sim$), antecedendo a frase. (Neste trabalho utiiza-se o til). Assim, a tabela-verdade da negação é mais simplificada que as demais já vistas. Tem-se:

Tabela 1.6: Tabela verdade da negação.

p	$\sim$ p
V	F
F	V

Fonte: O Autor.

Exemplo 1.4.1. *João é médico.* ***Negativa:*** *João* ***não*** *é médico.*

Exemplo 1.4.2. *Maria é estudante.* ***Negativa:*** *Maria* ***não*** *é estudante.*

Emprega-se, também, como equivalentes de "não A", as seguintes expressões:

Não é verdade que A.

É falso que A.

Daí as seguintes frases são equivalentes:

(i) Lógica **não** é fácil.

(ii) **Não é verdade que** Lógica é fácil.

(iii) **É falso que** Lógica é fácil.

1.5 Implicação Lógica

Os conceitos e resultados apresentados aqui seguem da referência [4].

Definição 1.5.1 (Implicação). *Dadas as proposições P e Q, dizemos que "P implica Q" quando na tabela de P e Q não ocorre* VF *em nenhuma linha, isto é, quando não temos simultaneamente P verdadeira e Q falsa.*

$$\text{Quando P implica Q, indicamos P} \Longrightarrow \text{Q.}$$

Observação 1.5.1. *Note que P implica Q quando a condicional $P \rightarrow Q$ é verdadeira.*

Exemplo 1.5.1. *Exemplo de implicação*

$$2|4 \Longrightarrow 2|4.5$$

significa que o condicional "se 2 é divisor de 4, então 2 é divisor de 4.5" é verdadeiro.

Exemplo 1.5.2. *Considere as proposições*

"R: João trabalha bastante" e "T: João é rico".

A proposição R implica T é a proposição "R $\Longrightarrow$ T: Se João trabalha bastante, então João é rico".

A implicação é falsa, pois João pode trabalhar bastante, e ainda assim não ser rico, visto que para ser rico depende de vários fatores, inclusive o tipo de trabalho que João exerce.

A implicação $\mathsf{P} \Longrightarrow \mathsf{Q}$ pode ser entendida como P é uma *condição suficiente* para Q, ou seja, a ocorrência de P é suficiente para garantir a ocorrência de Q. Ou ainda pode-se ter que Q é uma *condição necessária* para P, isto é, a ocorrência de Q é necessária para se ter a ocorrência de P.

Exemplo 1.5.3. *Considere a implicação $\mathsf{P} \Longrightarrow \mathsf{Q}$:*

Se João é elegível para votar então ele tem pelo menos 16 anos.

Sendo

P*: João é elegível para votar.*

Q*: João tem pelo menos 16 anos.*

A verdade de P *é suficiente para garantir a verdade de* Q*, ou seja, João ser elegível para votar é condição suficiente para que ele tenha pelo menos 16 anos.*

A condição Q *é necessária para a condição* P *ser verdadeira, ou seja, João ter pelo menos 16 anos é condição necessária para que ele seja elegível para votar.*

Propriedades da Implicação Lógica

A relação de implicação lógica entre proposições goza das propriedades *reflexiva* e *transitiva*, isto é, simbolicamente:

(i) $P \Longrightarrow P$ (*Reflexiva*)

(ii) Se $P \Longrightarrow Q$ e $Q \Longrightarrow R$, então $P \Longrightarrow R$ (*Transitiva*)

1.6 Equivalências Lógicas

Os conceitos e resultados apresentados aqui seguem da referência [4].

Definição 1.6.1 (Equivalência)**.** *Dadas duas proposições P e Q, diz-se que "P é equivalente a Q" quando P e Q têm tabelas-verdades iguais, isto é, quando P e Q tem sempre o mesmo valor lógico.*

Quando P é equivalente a Q, representa-se assim:

$$\mathsf{P} \Longleftrightarrow \mathsf{Q}$$

Observação 1.6.1. *Note que P equivale a Q quando a bicondicional $P \leftrightarrow Q$ é verdadeira.*

Exemplo 1.6.1. *Seja P uma proposição, tem-se a equivalência lógica*

$$\sim (\sim \mathsf{P}) \Longleftrightarrow \mathsf{P}$$

Note que é natural que a negação da negação de P resulte na proposição P, pois pela definição, para $\sim (\sim \mathsf{P})$ ser verdadeiro, por exemplo, faz-se necessário que $(\sim \mathsf{P})$ seja falso, e esse por sua vez, requer um P verdadeiro. Portanto, $\sim (\sim \mathsf{P}) \Longleftrightarrow \mathsf{P}$.

Exemplo 1.6.2. *Considere as proposições p e q, tem-se a seguinte equivalência lógica* $(\mathsf{p} \rightarrow \mathsf{q}) \Longleftrightarrow (\sim \mathsf{q} \rightarrow \sim \mathsf{p})$.

De fato, podemos observar isso na tabela 1.7:

Tabela 1.7: Tabela verdade da equivalência condicional.

p	q	p → q	∼ q	∼ p	∼ q → ∼ p
V	V	V	F	F	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V

Fonte: O Autor.

Observação 1.6.2. *A frase "P é uma condição necessária e suficiente para Q" significa "P se somente se Q". Em símbolo tem-se $\mathsf{P} \Longleftrightarrow \mathsf{Q}$.*

Exemplo 1.6.3. *A expressão:*

"O nascimento de João em solo brasileiro é uma condição necessária e suficiente para ele ser cidadão brasileiro."

Sendo

P*: João nasceu em solo brasileiro.*

Q*: João é cidadão brasileiro.*

pode ser excrita como "João nasceu em solo brasileiro se e somente se ele é um cidadão brasileiro."

Em símbolos tem-se que $\mathsf{P} \Longleftrightarrow \mathsf{Q}$.

Propriedades da Equivalência Lógica

A relação de equivalência lógica entre proposições goza das propriedades reflexiva, simétrica e transitiva, isto é, simbolicamente:

(i) $P \Longleftrightarrow Q$ (*Reflexiva*)

(ii) Se $P \Longleftrightarrow Q$, então $Q \Longleftrightarrow P$ (*Simétrica*)

(iii) Se $P \Longleftrightarrow Q$ e $Q \Longleftrightarrow R$, então $P \Longleftrightarrow R$ (*Transitiva*)

1.7 Tautologia e Contradição

Definição 1.7.1 (Tautologia)**.** *Uma proposição composta formada por duas ou mais proposições p, q, r, ... será dita uma Tautologia se ela for sempre verdadeira, independentemente dos valores lógicos das proposições p, q, r, ... que a compõem.*

Em outras palavras, para saber se uma proposição composta é uma Tautologia, será construída a sua tabela-verdade. Daí, se a última coluna da tabela-verdade só apresentar *verdadeiro* (e nenhum falso), então tem-se uma *Tautologia.*

Exemplo 1.7.1. *A proposição* $(\mathsf{p} \wedge \sim \mathsf{p}) \rightarrow (\mathsf{q} \vee \mathsf{p})$ *é uma tautologia, pois é sempre verdadeira, independentemente dos valores lógicos de p e de q, como se pode observar na tabela-verdade 1.8*

Tabela 1.8: Tabela verdade da Tautologia.

p	q	$\sim \mathsf{p}$	$\mathsf{p} \wedge \sim \mathsf{p}$	$\mathsf{q} \vee \mathsf{p}$	$(\mathsf{p} \wedge \sim \mathsf{p}) \rightarrow (\mathsf{q} \vee \mathsf{p})$
V	V	F	F	V	V
V	F	F	F	V	V
F	V	V	F	V	V
F	F	V	F	F	V

Fonte: O Autor.

Definição 1.7.2 (Contradição)**.** *Uma proposição composta formada por duas ou mais proposições p, q, r, ... será dita uma contradição se ela for sempre falsa, independentemente dos valores lógicos das proposições p, q, r, ... que a compõem.*

Ou seja, construindo a tabela-verdade de uma proposição composta, se todos os resultados da última coluna forem *FALSO*, então tem-se uma *contradição.*

Exemplo 1.7.2. *A proposição* $\mathsf{p} \leftrightarrow \sim \mathsf{p}$ *(p se e somente se não p) é uma contradição, pois é sempre falsa, independentemente do valor lógico de p, como se pode observar na tabela-verdade 1.9*

Tabela 1.9: Tabela verdade da Contradição.

p	$\sim p$	$p \leftrightarrow \sim p$
V	F	F
F	V	F

Fonte: O Autor.

Exemplo 1.7.3. *A proposição* $(p \vee \sim q) \leftrightarrow (\sim p \wedge q)$ *também é uma contradição, pois*

Tabela 1.10: Tabela verdade da contradição $(p \vee \sim q) \leftrightarrow (\sim p \wedge q)$

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \vee \sim q$	$\sim p \wedge q$	$(p \vee \sim q) \leftrightarrow (\sim p \wedge q)$
V	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	V	F	F
F	V	V	F	F	V	F
F	F	V	V	V	F	F

Fonte: O Autor.

1.8 Como negar proposições

Após um prévio conhecimento sobre as definições de proposições (conectivos lógicos, tabela verdade, negação de uma proposição simples) pode-se iniciar o estudo sobre "negação de proposições compostas".

Mostra-se a seguir como será a negação de proposições compostas usando o conceito de equivalências lógicas visto na seção 1.6.

Os conceitos e resultados apresentados aqui nessa seção seguem das referência [1] e [4].

1.8.1 Negação de uma conjunção

Observe, na tabela 1.11, que as proposições $\sim (p \wedge q)$ e $\sim p \vee \sim q$ são logicamente equivalentes.

$$\sim (p \wedge q) \Longleftrightarrow \sim p \vee \sim q$$

Tabela 1.11: Tabela verdade - negação da conjunção.

p	q	$p \wedge q$	$\sim (p \wedge q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	V	V	V	V

Fonte: O Autor.

Para negar uma proposição no formato de conjunção $p \wedge q$, será feito o seguinte:

(1) Nega-se a primeira ($\sim p$);

(2) Nega-se a segunda ($\sim q$);

(3) Troca-se $\wedge$ por $\vee$ ("e por ou").

Exemplo 1.8.1. *Considere as proposições*

"p: João é médico" e "q: Pedro é dentista"

Temos a conjunção

"$p \wedge q$*: João é médico e Pedro é dentista".*

A negação da conjunção "$p \wedge q$*", é a proposição*

"$\sim p \vee \sim q$*: João não é médico ou Pedro não é dentista".*

Exemplo 1.8.2. *Considere as proposições "*$p : a \neq 0$*", "*$q : b \neq 0$*" Tem-se a conjunção*

"$p \wedge q : a \neq 0$ *e* $q : b \neq 0$".

A negação da conjunção "$p \wedge q$*", é a proposição*

"$\sim (p \wedge q)$*:* $a = 0$ *ou* $b = 0$".

1.8.2 Negação de uma disjunção

Tendo em vista que $\sim(\mathsf{p} \vee \mathsf{q}) \Longleftrightarrow (\sim \mathsf{p} \wedge \ \sim \mathsf{q})$, estabelece-se que a negação de $\mathsf{p} \vee \mathsf{q}$ é a proposição $\sim \mathsf{p} \wedge \ \sim \mathsf{q}$.

Tabela 1.12: Tabela verdade - negação da disjunção.

p	q	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge \sim q$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	V	F	F	V	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	F	V	V	V	V

Fonte: O Autor.

Para negar uma proposição no formato de disjunção $\mathsf{p} \vee \mathsf{q}$, será feito o seguinte:

(1) Nega-se a primeira ($\sim \mathsf{p}$);

(2) Nega-se a segunda ($\sim \mathsf{q}$);

(3) Troca-se $\vee$ por $\wedge$ ("ou por e").

Exemplo 1.8.3. *Considere as proposições*

"p: o triângulo ABC é isósceles" e "q: o triângulo ABC é equilátero"

Temos a disjunção

"$\mathsf{p} \vee \mathsf{q}$*: o triângulo ABC é isósceles ou equilátero".*

A negação da disjunção "$\mathsf{p} \vee \mathsf{q}$*", é a proposição*

"$\sim(\mathsf{p} \vee \mathsf{q})$*: o triângulo ABC não é isósceles e não é equilátero".*

1.8.3 Negação da disjunção exclusiva

A negação da operação da disjunção exclusiva ("Ou p ou q") é dada pela equivalência lógica

$$\sim(\mathsf{p} \veebar \mathsf{q}) \Longleftrightarrow \mathsf{p} \leftrightarrow \mathsf{q}$$

Para negar uma proposição com a estrutura de uma disjunção exclusiva, será feita uma transformação em uma estrutura bicondicional.

Exemplo 1.8.4. *Considere as proposições*

"p: João é rico" e "q: Pedro é bonito"

Tem-se a conjunção

"$\mathsf{p} \veebar \mathsf{q}$*: Ou João é rico ou Pedro é bonito".*

A negação da conjunção "$\mathsf{p} \veebar \mathsf{q}$*", é a proposição*

"$\sim (\mathsf{p} \veebar \mathsf{q})$*: João é rico se e somente se Pedro é bonito".*

Pela tabela verdade pode-se "confirmar" a negação da proposição

Tabela 1.13: Tabela verdade - negação da disjunção exclusiva.

p	q	$\mathsf{p} \veebar \mathsf{q}$	$\sim (\mathsf{p} \veebar \mathsf{q})$	$\mathsf{p} \leftrightarrow \mathsf{q}$
V	V	F	V	V
V	F	V	F	F
F	V	V	F	F
F	F	F	V	V

Fonte: O Autor.

1.8.4 Negação de um condicional simples

Como foi visto na tabela 1.14 que as proposições $\sim (\mathsf{p} \rightarrow \mathsf{q})$ e $\mathsf{p} \wedge \sim \mathsf{q}$ são equivalentes, então estabelece-se que a negação de $\mathsf{p} \rightarrow \mathsf{q}$ é a proposição $\mathsf{p} \wedge \sim \mathsf{q}$.

Tabela 1.14: Tabela verdade - negação da condicional.

p	q	$\mathsf{p} \rightarrow \mathsf{q}$	$\sim (\mathsf{p} \rightarrow \mathsf{q})$	$\sim \mathsf{q}$	$\mathsf{p} \wedge \sim \mathsf{q}$
V	V	V	F	F	F
V	F	F	V	V	V
F	V	V	F	F	F
F	F	V	F	V	F

Fonte: O Autor.

1.8.5 Negação de proposições quantificadas

Para negar uma sentença quantificada com o quantificador universal, do tipo $(\forall x)(p(x))$, será feito o seguinte: substitui-se o quantificador pelo existencial e nega-se $p(x)$, obtendo: $(\exists x)(\sim p(x))$.

Exemplo 1.8.5. *Considere a proposição*

$$(\forall x)(x + 3 = 5)$$

Sua negação fica assim

$$(\exists x)(x + 3 \neq 5)$$

Exemplo 1.8.6. *Considere a proposição*

"Todo losango é um quadrado".

Sua negação fica assim

"Existe um losango que não é quadrado".

Para negar uma sentença quantificada com o quantificador existencial, do tipo $(\exists x)(p(x))$, será feito o seguinte: substitui-se o quantificador pelo universal e nega-se $p(x)$, obtendo: $(\forall x)(\sim p(x))$.

Exemplo 1.8.7. *Considere a sentença*

$$(\exists a)(a^2 = 9)$$

Sua negação fica assim

$$(\forall a)(a^2 \neq 9)$$

Exemplo 1.8.8. *Considere a proposição*

"Existe um número cuja raiz quadrada é zero".

Sua negação fica assim

"Todo número tem raiz quadrada diferente de zero".

1.9 Propriedades dos Conectivos Lógicos

Nesta seção seguem as propriedades da *conjunção* e da *disjunção* vistas anteriormente. Essas propriedades encontram-se demonstradas no Capítulo 7 da referência [1]. Será feita aqui uma exposição das mesmas.

Propriedades da Conjunção

Sejam p, q e r proposições simples quaisquer e sejam t e c proposições também simples cujos valores lógicos respectivos são V(verdade) e F(falso).

(i) *Idempotente:* $\mathsf{p} \wedge \mathsf{p} \Longleftrightarrow \mathsf{p}$

(ii) *Comutativa:* $\mathsf{p} \wedge \mathsf{q} \Longleftrightarrow \mathsf{q} \wedge \mathsf{p}$

(iii) *Associativa:* $(\mathsf{p} \wedge \mathsf{q}) \wedge \mathsf{r} \Longleftrightarrow \mathsf{p} \wedge (\mathsf{q} \wedge \mathsf{r})$

(iv) *Identidade:* $\mathsf{p} \wedge \mathsf{t} \Longleftrightarrow \mathsf{p}$ e $\mathsf{p} \wedge \mathsf{c} \Longleftrightarrow \mathsf{c}$

Propriedades da Disjunção

Sejam p, q e r proposições simples quaisquer e sejam t e c proposições também simples cujos valores lógicos respectivos são V(verdade) e F(falso).

(i) *Idempotente:* $\mathsf{p} \vee \mathsf{p} \Longleftrightarrow \mathsf{p}$

(ii) *Comutativa:* $\mathsf{p} \vee \mathsf{q} \Longleftrightarrow \mathsf{q} \vee \mathsf{p}$

(iii) *Associativa:* $(\mathsf{p} \vee \mathsf{q}) \vee \mathsf{r} \Longleftrightarrow \mathsf{p} \vee (\mathsf{q} \vee \mathsf{r})$

(iv) *Identidade:* $\mathsf{p} \vee \mathsf{t} \Longleftrightarrow \mathsf{t}$ e $\mathsf{p} \vee \mathsf{c} \Longleftrightarrow \mathsf{p}$

Propriedades da Conjunção e da Disjunção

Sejam p, q e r proposições simples quaisquer.

(i) *Distributivas:* $\mathsf{p} \wedge (\mathsf{q} \vee \mathsf{r}) \Longleftrightarrow (\mathsf{p} \wedge \mathsf{q}) \vee (\mathsf{p} \wedge \mathsf{r})$ e $\mathsf{p} \vee (\mathsf{q} \wedge \mathsf{r}) \Longleftrightarrow (\mathsf{p} \vee \mathsf{q}) \wedge (\mathsf{p} \vee \mathsf{r})$

(ii) *Absorção:* $\mathsf{p} \wedge (\mathsf{p} \vee \mathsf{q}) \Longleftrightarrow \mathsf{p}$ e $\mathsf{p} \vee (\mathsf{p} \wedge \mathsf{q}) \Longleftrightarrow \mathsf{p}$

(iii) *Regras de DE MORGAN* $\backsim (\mathsf{p} \wedge \mathsf{q}) \Longleftrightarrow \backsim \mathsf{p} \vee \backsim \mathsf{q}$ e $\backsim (\mathsf{p} \vee \mathsf{q}) \Longleftrightarrow \backsim \mathsf{p} \wedge \backsim \mathsf{q}$

Exemplo 1.9.1. *Considere a proposição "$(p \rightarrow q) \wedge p$". Sua tabela verdade é:*

Tabela 1.15: Tabela verdade - Regra Modus ponens.

p	q	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge p$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	V	F
F	F	V	F

Fonte: O Autor.

Observa-se que esta proposção é verdadeira apenas na linha 1 e, nesta mesma linha, a proposição "q" é verdadeira. Logo, ocorre a implcação lógica:

$$(p \rightarrow q) \wedge p \Longrightarrow q$$

denominada Regra Modus ponens.

Exemplo 1.9.2. *Segue as tabelas verdades das proposições "$(p \rightarrow q) \wedge \backsim q$" e "$\backsim p$".*

Tabela 1.16: Tabela verdade - Regra Modus tollens.

p	q	$p \rightarrow q$	$\backsim q$	$(p \rightarrow q) \wedge \backsim q$	$\backsim p$
V	V	V	F	F	F
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	F	V
F	F	V	V	V	V

Fonte: O Autor.

Observa-se na tabela que a proposição "$(p \rightarrow q) \wedge \backsim q$" é verdadeira apenas na linha 4, e nesta mesma linha, também é verdadeira a proposição "$\backsim p$". Logo, ocorre a implicação lógica:

$$(p \rightarrow q) \wedge \backsim q \Longrightarrow \backsim p$$

denominada Regra Modus tollens.

Capítulo 2

Noções de Conjuntos

Nesse capítulo serão abordados os conceitos primitivos de conjunto e elemento. Por isso nos permitiremos tratar aqui conjuntos dentro do chamado "ponto de vista ingênuo". Ou seja, adotando um estilo informal e descritivo, em contraste com o ponto de vista axiomático. Buscando entender os principais conceitos sobre os conjuntos suas operações e símbolos relacionados a esse assunto.

2.1 Noção de Conjuntos

A noção de conjuntos é bastante simples e fundamental na Matemática, pois a partir dela podem ser expressos todos os conceitos matemáticos.

A noção de conjunto é usada frequentemente. Ao organizar a lista de amigos para uma festa, ao preparar seus livros prediletos numa estante ou, então, ao formar um time, por exemplo, constituem-se conjuntos.

Um *conjunto* ou *coleção* é formado de objetos, chamados os seus elementos. Eis alguns exemplos:

Exemplo 2.1.1. *Exemplo de conjuntos*

a) conjunto das vogais

b) conjunto dos algarismos romanos

c) conjunto dos números ímpares positivos

d) conjunto dos planetas do sistema solar

e) conjunto dos nomes dos meses de 31 dias

Um elemento de um conjunto pode ser uma letra, um número, um nome, etc. É importante notar que um conjunto pode ser elemento de outro conjunto. Por exemplo,

Exemplo 2.1.2.

$$D = \{a,\ i,\ o, \{e,\ o,\ u\}, \{o, \{a,\ i,\}\}, e\}$$

Observe que, da mesma forma que i é elemento de D, temos $\{e,\ o,\ u\}$ um elemento de D. Note ainda que u não é elemento de D, assim como $\{a,\ i\}$ também não é elemento de D.

Sejam A um conjunto e x um elemento. Se x pertence ao conjunto A, escreveremos:

$$x \in A.$$

Para indicar que x não é um elemento do conjunto A, escreveremos:

$$x \notin A.$$

2.2 Representação de um conjunto

Serão utilizados dois recursos importantes para descrever um conjunto e seus elementos: serão enumerados (citamos, escrevemos) os elementos do conjunto ou será dada uma propriedade característica dos elementos do conjunto.

2.2.1 Descrição pela citação dos elementos

Quando um conjunto é dado pela enumeração de seus elementos, deve-se representá-lo escrevendo seus elementos entre chaves.

Exemplo 2.2.1. *Representação por citação*

a) conjunto das vogais $\{a,\ e,\ i,\ \ o,\ u\}$

b) conjunto dos números ímpares positivos $\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ ...\}$

c) conjunto dos divisores positivos de 100 $\{1,\ 2,\ 5,\ 10,\ ...,\ 100\}$

2.2.2 Descrição por uma propriedade

Quando se deseja descrever um conjunto A por meio de uma propriedade P de seus elementos x, escreve-se:

$$A = \{x\ ; x \text{ tem a propriedade P}\}$$

e lê-se: ”A é o conjunto dos elementos x tal que x tem a propriedade P”.

Exemplo 2.2.2. *Representação por propriedade*

a) $\{x \,; x$ *é um número inteiro e* $x > 2\}$ *é uma maneira de indicar o conjunto:* $\{3,\ 4,\ 5,\ 6,\ ...\}$

b) $\{x \,; x$ *é divisor inteiro de 3*$\}$ *é uma maneira de indicar o conjunto:* $\{-1,\ 1,\ -3,\ 3\}$

c) $\{x \,; x$ *é inteiro e* $0 \leqslant x \leqslant 50\}$ *pode também ser indicado por:* $\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ ...,\ 50\}$

2.3 Conjunto Unitário - Conjunto Vazio

Embora o conceito intuitivo de conjunto remete-se à idéia de pluralidade (coleção de objetos), deve-se considerar a existência de conjuntos com apenas um elemento, chamados de conjuntos unitários, e o conjunto sem qualquer elemento, chamado de conjunto vazio ($\emptyset$).

Exemplo 2.3.1. *Conjunto dos meses do ano que possuem menos de 30 dias: {fevereiro}.*

Exemplo 2.3.2. $\{x \in \mathbb{Z} \,|\, x < 0 \,\mathsf{e}\, x > 0\} = \emptyset$

Quando representa-se um conjunto mediante uma lista, as repetições e a ordem na qual aparecem os elementos na lista são irrelevantes. Por exemplo, o conjunto $A = \{a,\ b,\ c\}$ é também representado como $A = \{b,\ c,\ a\}$ ou $A = \{a,\ c,\ b\}$.

2.4 Igualdade de Conjuntos

Dados dois conjuntos A e B, diz-se que A é igual a B, e denota-se por $A = B$, se eles tem os mesmos elementos. Assim,

$$A = B \iff (\forall\ x)(x \in A \Leftrightarrow x \in B).$$

O fato de A e B não serem iguais é expresso escrevendo $A \neq B$. Note que para ter $A \neq B$ é suficiente garantir a existência de um $x \in A$ tal que $x \notin B$, ou vice-versa.

Exemplo 2.4.1. *Sendo* $A = \{a,\ b,\ c,\ d\}$ *e* $B = \{d,\ b,\ b,\ b,\ c,\ c,\ a\}$*, tem-se:*

$$A = \{a,\ b,\ c,\ d\} = \{d,\ b,\ b,\ b,\ c,\ c,\ a\} = B$$

Observação 2.4.1. *Na matemática, uma coisa só é igual a si própria. Quando se escreve $a = b$, isto significa que a e b são símbolos diferentes, usados para designar o mesmo objeto.*

A ordem em que aparecem os elementos no conjunto não tem importância. Assim, usando o Exemplo 2.4.1, tem-se que o conjunto $A = \{a,\ b,\ c,\ d\}$ é o mesmo que $B = \{d,\ b,\ b,\ b,\ c,\ c,\ a\}$. Além disso, como os elementos de um conjunto são "distintos", o conjunto $\{d,\ b,\ b,\ b,\ c,\ c,\ a\}$ não é uma notação apropriada, devendo a mesma ser substituída por $\{a,\ b,\ c,\ d\}$.

Exemplo 2.4.2. *Considere as vogais a, e, i, o e u. Note que os conjuntos*

$$A = \{e,\ i\} \text{ e } B = \{e,\ i,\ u\}$$

não são iguais. Assim, $A \neq \mathsf{B}$.

2.5 Conjunto Universo

Em Teoria dos Conjuntos, para evitar ambiguidades, é preciso que se defina um conjunto que contenha todos os elementos envolvidos em um determinado assunto ou estudo. Por exemplo, o conjunto $\mathsf{A} = \{\mathsf{x}\ ; -2 \leqslant \mathsf{x} \leqslant 2\}$ das soluções da inequação $|\mathsf{x}| \leqslant 2$ é tal que, se $\mathsf{x} \in \mathbb{R}$, A é um conjunto infinito ao passo que se $\mathsf{x} \in \mathbb{Z}$ então $\mathsf{A} = \{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$, o qual é finito. Portanto, é essencial, que ao descrever um conjunto através de uma propriedade P, o "ambiente" seja fixado no que está sendo trabalhado. Tal "ambiente" é usualmente denominado Conjunto Universo e denotado por U, ficando claro que o termo universo é empregado no sentido de universo de discurso.

Exemplo 2.5.1. *Ao estudar Geometria Plana, o conjunto universo é o conjunto dos pontos de um plano:*

$$\mathsf{U} = \{(\mathsf{x}, \mathsf{y}); \mathsf{x} \in \mathbb{R} \text{ e } \mathsf{y} \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2.$$

Exemplo 2.5.2. *Se estudamos máximo divisor comum (m.d.c.), o conjunto universo é, em geral, $\mathsf{U} = \mathbb{Z}$.*

2.6 Subconjuntos

Sejam A e B conjuntos de um mesmo conjunto universo U.

Definição 2.6.1. *Diz-se que* A *é um subconjunto de* B*, e indica-se por* $A \subset B$*, se para todo* $x \in A$ *tem-se* $x \in B$.

Em símbolos a definição fica assim:

$$A \subset B \iff (\forall\, x)(x \in A \Rightarrow x \in B).$$

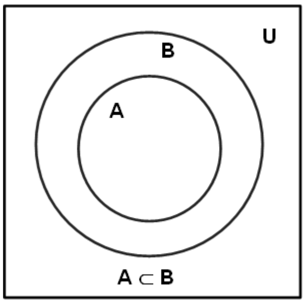

Figura 2.1: Diagrama de Venn - Inclusão. Fonte: O Autor

O símbolo "$\subset$" é dito sinal de inclusão e significa "contido em".

Exemplo 2.6.1. $\{a,\ b\} \subset \{a,\ b,\ c,\ d\}$

Exemplo 2.6.2. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Exemplo 2.6.3. $\{x \in \mathbb{Z} \,|\, x \text{ é par}\} \subset \mathbb{Z}$.

Exemplo 2.6.4. $\emptyset \subset A$*, para todo conjunto* A*. De fato, se ocorrer o contrário deve existir algum elemento de* $\emptyset$ *que não pertence a* A*. Desde que* $\emptyset$ *não possui elementos, tem-se um absurdo. Portanto* $\emptyset \subset A$ *para todo conjunto* A.

Exemplo 2.6.5. $A,\ B \subset U$ *e* $A \subset A$.

Quando $A \subset B$, também podemos escrever $B \supset A$, que se lê "B contém A". Com a notação $A \not\subset B$ indicamos que "A não está contido em B", isto é, a negação de $A \subset B$. É evidente que $A \not\subset B$ somente se existe ao menos um elemento de A que não pertence a B.

Propriedades da Inclusão

Proposição 2.1. *Dados os conjuntos* $A,\ B$ e $C \subset U$*, temos:*

(i) $A = B \iff A \subset B$ *e* $B \subset A$*; (Anti-Simetria)*

(ii) $A = A$; *(Reflexividade)*

(iii) $A \subset B$ *e* $B \subset C \Rightarrow A \subset C$. *(Transitividade)*

Demonstração. (i) Ora, $A = B \Leftrightarrow A$ e B possuem os mesmos elementos $\Leftrightarrow$ todo elemento de A é elemento de B e todo elemento de B é elemento de $A \Leftrightarrow A \subset B$ e $B \subset A$.

(ii) Consequência imediata de (i).

(iii) Dado $x \in A$ temos $x \in B$. Daí, como $B \subset C$, segue que $x \in C$. Sendo $x \in A$ arbitrário tem-se $A \subset C$.

$\square$

Em virtude da proposição acima item (i), tem-se que quase toda demonstração de igualdade entre dois conjuntos A e B se dividem em duas partes, deve-se primeiro mostrar que $A \subset B$ e depois mostrar que $B \subset A$.

Por outro lado, vale a seguinte equivalência

$$A \neq B \Longleftrightarrow (A \not\subset B \text{ ou } B \not\subset A).$$

Observação 2.6.1. *Observe que a pertinência ($\in$) e a inclusão ($\subset$) são na verdade coisas conceitualmente diferentes. A pertinência relaciona elemento e conjunto enquanto a inclusão relaciona dois conjuntos. Mais ainda, a inclusão é reflexiva e transitiva e a pertinência não.*

2.6.1 Conjunto das Partes

Para todo conjunto E admite-se a existência de um outro conjunto $\mathcal{P}(E)$ cujos elementos são os subconjuntos de E. Tal conjunto é denominado conjunto das partes de E. Assim,

$$\mathcal{P}(E) = \{X \; ; \; X \subset E\}.$$

Note que $\mathcal{P}(E)$ é caracterizado pelo fato de

$$X \subset E \Longleftrightarrow X \in \mathcal{P}(E).$$

Exemplo 2.6.6. $E = \{a, \; b\}$; $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, \; b\}\}$.

Exemplo 2.6.7. $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ *e* $\mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

Prova-se que se E possui n elementos então $\mathcal{P}(E)$ possui 2^n elementos. Devido a esse fato alguns autores chamam o conjunto das partes de E de conjunto potência de E denotando o mesmo por 2^E. Nestas notas será utilizada a notação usual $\mathcal{P}(E)$.

2.7 Operações com Conjuntos

Será feita agora uma introdução às leis básicas de formação e operação com conjuntos. Aqui serão considerados os conjuntos em questão contidos num mesmo conjunto universo.

Definição 2.7.1 (União). *Dados dois conjuntos* A *e* B*, define-se a união* $A \cup B$ *de* A *e* B *como sendo o conjunto*

$$A \cup B = \{x \ ; \ x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

Em outros termos, a união de dois conjuntos A e B é o conjunto dos elementos que pertencem a um ou ambos os conjuntos A e B.

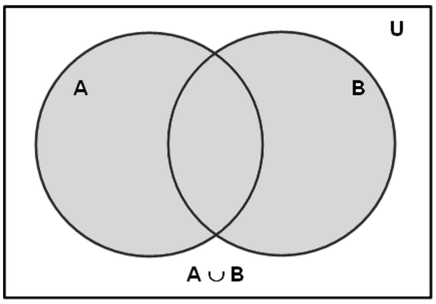

Figura 2.2: Diagrama de Venn - União. Fonte: O Autor

Exemplo 2.7.1.

$$\{a, \ b, \ c,\} \cup \{c, \ d, \ e\} = \{a, \ b, \ c, \ d, \ e\}$$

Definição 2.7.2 (Interseção). *Dados dois conjuntos* A *e* B*, define-se a interseção* $A \cap B$ *de* A *e* B *como sendo o conjunto*

$$A \cap B = \{x \ ; \ x \in A \text{ e } x \in B\}.$$

Ou seja, a interseção de dois conjuntos A e B é o conjunto dos elementos que pertencem a ambos os conjuntos A e B.

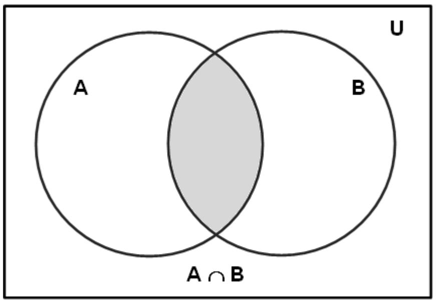

Figura 2.3: Diagrama de Venn - Interseção. Fonte: O Autor

Exemplo 2.7.2.

$$\{a,\ b,\ c,\} \cap \{b,\ c,\ d,\ e\} = \{b,\ c\}$$

Observação 2.7.1. *Se* $A \cap B = \emptyset$ *diz-se que os conjuntos* A *e* B *são* **Disjuntos**.

Sendo A, B e C conjuntos quaisquer, valem as seguintes propriedades, que inter-relacionam a união ($\cup$) e a interseção ($\cap$) de conjuntos:

(i) $A \cup A = A = A \cap A$; (Reflexiva)

(ii) $A \cup B = B \cup A$ e $A \cap B = B \cap A$; (Comutativa)

(iii) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ e $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$; (Associativa)

(iv) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ e $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$; (Distributiva)

Demonstração. Para os itens (i)-(iii) veja [5]. Demonstra-se então o item $(iv)_1$. Dado $x \in A \cup (B \cap C)$ temos que $x \in A$ ou $x \in B \cap C$. Se $x \in A$ então $x \in A \cup B$ e $x \in A \cup C$, donde $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Se $x \in B \cap C$, então $x \in B$ e $x \in C$, donde $x \in A \cup B$ e $x \in A \cup C$ e, portanto, $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Assim, em qualquer caso, $x \in A \cup (B \cap C) \Rightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Logo, $A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Reciprocamente, dado $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ temos $x \in A \cup B$ e $x \in A \cup C$. Ou seja, $(x \in A \text{ ou } x \in B)$ e $(x \in A \text{ ou } x \in C)$. Daí segue que $x \in A$ ou $x \in B \cap C$ (recorde a regra de substituição: distributiva!). Assim, $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C)$. Portanto, vale $(iv)_1$. □

Embora as operações $\cap$ e $\cup$ foram definidas para dois conjuntos, pode-se generalizar e reescrever a definicão para mais de dois conjuntos.

Definição 2.7.3. *Sejam Λ um conjunto não vazio e X um conjunto. Se a cada elemento $\lambda \in \Lambda$ corresponde um único conjunto $A_\lambda \subset X$, dizemos que a coleção $\mathcal{F} = \{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ é uma família de elementos de X indexada pelo conjunto Λ. O conjunto Λ é denominado conjunto de índices da família.*

Note que uma família $\mathcal{F} = \{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ de elementos de X é um subconjunto de $\mathcal{P}(X)$. Os índices $\lambda \in \Lambda$ servem como indicativo para os subconjuntos de X que estão sendo considerados bem como a quantidade dos mesmos. Assim, a grosso modo, uma família de elementos de um conjunto X é uma coleção de subconjuntos de X.

Observa-se que qualquer conjunto não vazio pode servir como conjunto de índices de uma família de conjuntos.

Exemplo 2.7.3. *Seja X um conjunto não vazio. Para cada $x \in X$ defina o conjunto $A_x = \{x\}$ e a família $\mathcal{F} = \{A_x\}_{x\in X}$. Neste caso tem-se $\Lambda = X$.*

Exemplo 2.7.4. *Sejam $\Lambda = I_n = \{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$ um conjunto de índices e X um conjunto. Uma família de elementos de X indexada por I_n é o conjunto $\mathcal{F} = \{A_\lambda\}_{\lambda\in I_n} = \{A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_n\}$. No caso geral, $\Lambda = \mathbb{N}$ e $\mathcal{F} = \{A_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{N}} = \{A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_n,\ \cdots\}$.*

Definição 2.7.4. *Seja $\mathcal{F} = \{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ uma família de conjuntos com índices em Λ. Define-se a união e a interseção da família $\mathcal{F}$ do seguinte modo*

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \{x; x \in A_\lambda \textit{ para algum índice } \lambda \in \Lambda\}$$

e

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \{x; x \in A_\lambda\ \forall\ \lambda \in \Lambda\}.$$

Exemplo 2.7.5. *Considerando a família do exemplo 2.7.3, tem-se $\bigcup_{x\in X} A_x = X$ e considerando X não vazio com pelo menos dois elementos tem-se $\bigcap_{x\in X} A_x = \emptyset$.*

Exemplo 2.7.6. *Nas famílias do exemplo 2.7.4, tem-se*

$$\bigcup_{\lambda\in I_n} A_\lambda = \bigcup_{\lambda=1}^{n} A_\lambda = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$$

e

$$\bigcap_{\lambda\in I_n} A_\lambda = \bigcap_{\lambda=1}^{n} A_\lambda = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n.$$

No caso de $\Lambda = \mathbb{N}$, *tem-se*

$$\bigcup_{\lambda \in \mathbb{N}} A_\lambda = \bigcup_{\lambda=1}^{\infty} A_\lambda = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots$$

e

$$\bigcap_{\lambda \in \mathbb{N}} A_\lambda = \bigcap_{\lambda=1}^{\infty} A_\lambda = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \cap \cdots .$$

Exemplo 2.7.7. *Para cada* $n \in \mathbb{N}$, *considere o conjunto*

$$A_n = \{-n, -n+1, \cdots, -1, 0, 1, \cdots, n-1, n\}.$$

Então

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \mathbb{Z} \text{ e } \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{-1, 0, 1\}.$$

Define-se a seguir a operação diferença entre conjuntos.

Definição 2.7.5 (Diferença)**.** *Sejam* A *e* B *conjuntos. Define-se o conjunto diferença* $A - B$ *como sendo*

$$A - B = \{x \ ; \ x \in A \text{ e } x \notin B\}.$$

Em outros termos, a diferença entre dois conjuntos $A - B$ é o conjunto formado pelos elementos que pertencem ao conjunto A, mas não pertencem ao conjunto B.

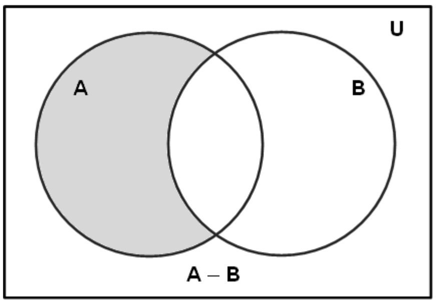

Figura 2.4: Diagrama de Venn - Diferença de conjuntos. Fonte: O Autor

Define-se também a diferença simétrica entre A e B (notação: $A \triangle B$):

Definição 2.7.6 (Diferença Simétrica)**.** *A diferença simétrica* $A \triangle B$ *entre dois conjuntos* A *e* B *é o conjunto formado pela união dos conjuntos* $A - B$ *e* $B - A$. *Representa-se*

$$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$$

.

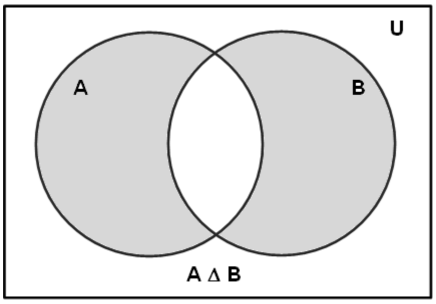

Figura 2.5: Diagrama de Venn - Diferença simétrica. Fonte: O Autor

É importante observar que, se A e B são conjuntos, $A - B$ e $B - A$ são, em geral, conjuntos diferentes. Também é claro que $A - B \subset A$.

Exemplo 2.7.8. *Sejam* $A = \{x \in \mathbb{Z}\ ;\ x \geqslant -3\}$ *e* $B = \{x \in \mathbb{Z}\ ;\ x \leqslant 2\}$. *Então* $A - B = \{x \in \mathbb{Z}\ ;\ x \geqslant 3\}$ *e* $B - A = \{x \in \mathbb{Z}\ ;\ x \leqslant -4\}$.

Note que não se exige que B seja um subconjunto de A para formar a diferença $A - B$. Quando A e B são disjuntos tem-se $A - B = A$.

Quando se tem $B \subset A$, a diferença $A - B$ chama-se o complementar de B em relação a A e esceve-se $C_A B = A - B$. Assim,

Definição 2.7.7 (Complementar)**.** *Sejam* A *e* B *conjuntos com* $B \subset A$. *O complementar de* B *em relação a* A *é o conjunto* $C_A B$ *definido por*

$$C_A B = A - B.$$

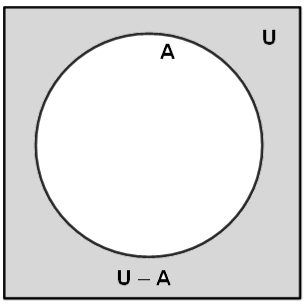

Figura 2.6: Diagrama de Venn - Complementar. Fonte: O Autor

No caso do complementar de X em relação ao conjunto universo U, diz-se apenas o complementar de X e usa-se a seguinte notação

$$C_U X = X^c.$$

Observe ainda que, neste caso, tem-se

$$x \in X^c \Longleftrightarrow x \notin X.$$

Exemplo 2.7.9. *No exemplo 2.7.8, considerando* $U = \mathbb{Z}$ *tem-se* $A^c = \{x \in \mathbb{Z} \ ; \ x < -3\}$ *e* $B^c = \{x \in \mathbb{Z} \ ; \ x > 2\}$.

Exemplo 2.7.10. *Considerando* $U = \mathbb{N}$ *e* $A = \{n \in \mathbb{N} \ ; \ n$ *é par*$\}$ *tem-se* $A^c = \{n \in \mathbb{N} \ ; \ n$ *é ímpar*$\}$.

Teorema 1. *Sejam* A *e* B *conjuntos contidos num mesmo conjunto universo* U. *Então,*

(i) *Se* $A \subset B$, *então* $B^c \subset A^c$;

(ii) $(A^c)^c = A$;

(iii) $\emptyset^c = U$ *e* $U^c = \emptyset$;

(iv) $A - B = A \cap B^c$;

(v) *[Leis de De Morgan]*
$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ *e* $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

Demonstração. Para as demonstrações dos ítens (i)-(iv) veja [5]. Prova-se a seguir as Leis de De Morgan.

(v) (1) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

Com efeito, $x \in (A \cup B)^c \Leftrightarrow x \notin A \cup B \Leftrightarrow x \notin A$ e $x \notin B \Leftrightarrow x \in A^c \cap B^c$.

Portanto, $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

(2) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

Com efeito, $x \in (A \cap B)^c \Leftrightarrow x \notin A \cap B \Leftrightarrow x \notin A$ ou $x \notin B \Leftrightarrow x \in A^c \cup B^c$.

Logo, $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

□

Capítulo 3

Uso de Conjuntos no Estudo da Lógica Matemática

No Capítulo 1 ficou claro o que é proposição, os conectivos presentes nas proposições, os quantificadores e a negação de uma proposição. Além das importantes definições de implicação lógica e equivalência lógica. O Capítulo 2 deste trabalho tratou sobre os principais conceitos de conjuntos dentro da proposta escolhida.

Apresenta-se agora algumas relações existentes entre esses conceitos para facilitar a resolução de problemas do conteúdo de lógica. Para viabilizar a aplicação do que propõe-se nas seções a seguir, sugerimos o seguinte roteiro a ser seguido pelo professor:

1) Inicialmente apresentar alguns dos principais conceitos da Lógica Matemática: Princípios da Lógica Matemática, Proposições, Conectivos e Quantificadores. Nesse ponto ainda é necessário o uso de tabelas verdades, mas buscando-se sempre enfatizar as noções intuitivas de tais conceitos. A ideia é deixar claro como se dá o uso de tais conceitos e fixar notações básicas.

2) Em seguida apresentar a teoria ingênua dos conjuntos. Aqui necessariamente usa-se os conceitos do item 1, o que justifica a ordem de apresentação sugerida.

3) Apresentar via as equivalências destacadas nas seções seguintes os demais conceitos da lógica matemática (implicações, negações, silogismos, ...) e como se apresentam os conceitos do item 1 em linguagem de conjuntos.

4) Por fim, trabalhar o raciocínio lógico com a linguagem de conjuntos através da resolução de exercícios.

Ressalta-se que é muito importante que esse estudo seja trabalhado no início da 1ª série do Ensino Médio, pois isso pode ajudá-los a entender e usar o raciocínio lógico-dedutivo, o qual posteriormente será cobrado. É importante notar que quanto mais cedo um estudante tiver acesso aos conceitos lógicos, mais facilmente construirá o raciocínio matemático.

Alguns conceitos e resultados citados aqui nesse capítulo seguem das referências [5] e [6].

3.1 Equivalências entre conceitos relacionados a conjuntos e lógica

Na Matemática atual a linguagem de conjuntos é muito presente. E ao encontrar um problema que envolva a lógica matemática pode-se buscar na linguagem de conjuntos meios de resolução de tal problema. Por ser uma linguagem simples fica dessa forma mais fácil para os alunos o entendimento do texto e os passos utilizados na resolução.

Tal linguagem, universalmente adotada na apresentação da Matemática nos dias atuais, ganhou esta posição porque permite dar aos conceitos e às proposições desta ciência a precisão e a generalidade que constituem sua característica básica. Os conjuntos substituem as "propriedades" e as "condições". Assim, em vez de dizer que "o elemento x goza da propriedade P" ou "o elemento y satisfaz a condição C", pode-se escrever $x \in A$ e $y \in B$, onde A é o conjunto dos elementos que gozam da propriedade P e B é o conjunto dos elementos que satisfazem a condição C, por exemplo ver [2].

A implicação lógica por exemplo tem estreita relação com a inclusão de conjuntos. Considere P e Q propriedades referentes a um elemento de um conjunto U (*conjunto universo*). Essas propriedades definem os conjuntos A, formado pelos elementos de U que gozam de P, e B, conjunto formado pelos elementos de U que gozam da propriedade Q. Diz-se então que a propriedade P *implica* a propriedade Q, em símbolos $P \Longrightarrow Q$, para significar que $A \subset B$, ou seja, A é subconjunto de B.

A implicação $Q \Longrightarrow P$ chama-se a *recíproca* de $P \Longrightarrow Q$. Evidentemente, a recíproca de uma implicação verdadeira pode ser falsa.

Exemplo 3.1.1. *Seja* U *o conjunto dos quadriláteros convexos do plano. Designe como* P *a propriedade de um quadrilátero ter os seus ângulos retos e por* Q *a propriedade de um* *quadrilátero ter os seus lados opostos paralelos. Então pode-se escrever* $\mathrm{P} \Longrightarrow \mathrm{Q}$. *Porém a recíproca* $\mathrm{Q} \Longrightarrow \mathrm{P}$ *é falsa, pois nem todo paralelogramo é retângulo.*

Quando são verdadeiras ambas as implicações $P \Longrightarrow Q$ e $Q \Longrightarrow P$, diz-se que $Q \Longleftrightarrow P$, "P é equivalente a Q". Isto significa que o conjunto dos elementos que gozam da propriedade P coincide com o conjunto dos elementos que gozam de Q. Ou ainda, sejam os conjuntos A dos elementos que gozam de P e B o conjunto dos elementos que gozam de Q, quando ocorre essa equivalência, diz-se que $A = B$ (igualdade de conjuntos).

No que diz respeito ao *complementar de um conjunto*, pode-se também, estabelecer uma relação com o conceito de negação da lógica matemática. Observe como isso pode ser feito. Considere um conjunto universo U e um outro conjunto A subconjunto de U, chama-se *complementar* de A ao conjunto A^c formado pelos elementos de U que não pertencem a A, em símbolos temos

$$A^c = \{x; x \notin A\}$$

Exemplo 3.1.2. *Considere* U *o conjunto de todas as letras do alfabeto e a proposição aberta "*$P(x)$*: x é consoante". Se* A *é o conjunto das consoantes, pode-se fazer a representação* $A = \{x \in U; P(x)\}$ *e como o complementar de* A *é dado por* $\{x; x \notin A\}$ *pode-se representar o conjunto complementar de* A *da seguinte maneira*

$$A^c = \{x \in U; \sim P(x)\} \textit{ ou seja, } A^c = \{a,\ e,\ i,\ o,\ u\}$$

que é o conjunto das vogais.

Para cada elemento x em U, vale apenas uma das alternativas: $x \in A$ ou $x \notin A$.

O fato de que para todo $x \in U$ não existir uma outra opção além de $x \in A$ ou $x \notin A$ é conhecido, como foi visto nas proposições, como o *princípio do terceiro excluído*, e o fato de que as alternativas $x \in A$ e $x \notin A$ não poderem ser verdadeiras ao mesmo tempo, pois uma é a negação da outra, chama-se o *princípio da não-contradição.*

Sendo assim, pode-se escrever: $x \in A^c$, se $x \notin A$ e $x \notin A^c$, se $x \in A$.

Seguem-se as seguintes propriedades referentes ao complementar:

(1) Todo conjunto é complementar do seu complementar, $(A^c)^c = A$.

(2) Sejam A e B conjuntos quaisquer, $A \subset B$, se, e somente se, $B^c \subset A^c$.

Esta equivalência sob o ponto de vista lógico, usando-se as propriedades P e Q, que definem respectivamente os conjuntos A e B. As propriedades que definem os conjuntos A^c e B^c são respectivamente a negação de P e a negação de Q. Assim tem-se que:

(3) $P \Longrightarrow Q$ se, e somente se, $\sim Q \Longrightarrow \sim P$.

A implicação $\sim Q \Longrightarrow \sim P$ chama-se a *contrapositiva* da implicação $P \Longrightarrow Q$.

No dia-a-dia da Matemática é frequente, e muitas vezes útil, substituir uma implicação por sua contrapositiva, afim de tornar seu significado mais claro ou mais manejável. Por isso é de muita importância entender que $P \Longrightarrow Q$ e $\sim Q \Longrightarrow \sim P$ são proposições equivalentes.

A equivalência entre uma implicação e sua contrapositiva é a base das demonstrações por absurdo.

Em relação aos conceitos de **união** e **interseção** de conjuntos os mesmos também possuem relação com conectivos lógicos. Conhece-se a definição de *união* de dois conjuntos como sendo o conjunto formado pelos elementos que pertencem a um *ou* outro conjunto, enquanto que a *interseção* de dois conjuntos é o conjunto formado pelos elementos de um *e* do outro conjunto. Sendo assim, se considerar os conjuntos A, B, a *união* $A \cup B$, a *interseção* $A \cap B$ e as afirmações $x \in A$, $x \in B$, veremos que $x \in (A \cup B)$ quando pelo menos uma dessas afirmações for verdadeira e, por outro lado, $x \in (A \cap B)$ quando ambas as afirmações acima forem verdadeiras. Em outros termos tem-se que:

$$x \in (A \cup B) \text{ significa "} x \in A \text{ ou } x \in B \text{"}$$
$$x \in (A \cap B) \text{ significa "} x \in A \text{ e } x \in B \text{"}$$

Nota-se, assim, que as operações $A \cup B$ e $A \cap B$ entre conjuntos constituem a contrapartida matemática dos conectivos lógicos "ou" e "e". Desta maneira, se o conjunto A é formado pelos elementos que gozam da propriedade P e B pelos que gozam da propriedade Q então a proposição que define o conjunto $A \cup B$ é "$P \vee Q$" e o conjunto $A \cap B$ é definido pela proposição "$P \wedge Q$".

A conexão entre as operações *união* ($\cup$), *interseção* ($\cap$) e a relação de inclusão $\subset$ é dada pelas seguintes equivalências:

$$A \cup B = B \Longleftrightarrow A \subset B \Longleftrightarrow A \cap B = A.$$

Além disso $A \subset B \Longrightarrow A \cup C \subset B \cup C$ e $A \cap C \subset B \cap C$ para todo C.

E, finalmente, se A e B são subconjuntos de U (conjunto universo), tem-se que:

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \text{ e } (A \cap B)^c = A^c \cup B^c \text{ “Relações de Morgan”}$$

Estas relações significam que a negação de “P ou Q” é “a negação de P e a negação de Q” e a negação de “P e Q” é “a negação de P ou a negação de Q”.

3.2 Aplicação na resolução de problemas

Esta seção traz alguns problemas como exercícios a serem aplicados aos alunos do Ensino Médio após a exposição teórica dos conteúdos aqui abordados. A proposta é que os conceitos de Lógica sejam trabalhados em harmonia com a linguagem de Conjuntos estudada no primeiro ano do Ensino Médio. Espera-se que os conteúdos trabalhados aqui sejam capazes de fazer com que os alunos desenvolvam algumas habilidades:

1. Transcrever mensagens matemáticas da linguagem corrente para linguagem simbólica e vice-versa.

2. Distinguir e utilizar raciocínios dedutivos e indutivos.

3. Discutir ideias e produzir argumentos convincentes.

Entende-se que com esses exercícios os alunos poderão compreender melhor os assuntos trabalhados neste capítulo no qual foram feitas equivalências entre os conceitos Lógicos e os conceitos de Conjuntos. Com tudo espera-se que os alunos possam ter uma ferramenta a mais para o uso na resolução de outros problemas semelhantes, entendendo o texto que o problema traz e com isso transcrever para uma linguagem acessível para ele de modo a montar uma estratégia de resolução do problema.

A seguir apresenta-se alguns problemas com as soluções que usam a relação entre lógica e a linguagem de conjuntos que foi abordada nesse trabalho:

Problema 1. Expressões tais como “para todo” e “qualquer que seja” são chamadas de quantificadores e aparecem em sentenças dos tipos:

(1) “Para todo x, é satisfeita a condição $P(x)$”

(2) "Existe algum x que satisfaz a condição $P(x)$", onde $P(x)$ é uma condição envolvendo a variável x.

a) Sendo A o conjunto de todos os objetos x (de um certo conjunto universo U) que satisfazem a condição $P(x)$, escreva as sentenças (1) e (2) acima, usando a linguagem de conjuntos.

b) Quais são as negações de (1) e (2)? Escreva cada uma destas negações usando conjuntos e compare com as sentenças obtidas em a).

c) Para cada sentença abaixo, diga se ela é verdadeira ou falsa e forme sua negação:

1. Existe um número real x tal que $x^2 = -1$.

2. Para todo número inteiro n, vale $n^2 > n$.

3. Para todo número real x, tem-se $x > 1$ ou $x^2 < 1$.

4. Para todo número real x existe um número natural n tal que $n > x$.

5. Existe um número natural n tal que, para todo número real x, tem-se $n > x$.

Solução:

a) Seja A o conjunto dos elementos de U que satisfazem a condição $p(x)$. A afirmação (1) significa que $A = U$ enquanto que (2) exprime que $A \neq \varnothing$.

b) As negações de (1) e (2) são respectivamente: "Existe algum $x \in U$ que não satisfaz a condição $P(x)$" e "nenhum $x \in U$ satisfaz $P(x)$". Em termos de conjuntos (e com a notação do ítem a)), estas negações se exprimem assim: $A^c \neq \varnothing$ e $A^c = U$.

c) As sentenças na ordem são 1.(falsa), 2.(falsa), 3.(falsa), 4.(verdadeira), 5.(falsa). As negações das sentenças são:
   1. Para todo número real x, tem-se $x^2 \neq -1$.
   2. Existe um número inteiro n tal que $n^2 \leqslant n$.
   3. Existe um número real x tal que $x \leqslant 1$ e $x^2 \geqslant 1$.
   4. Existe um número real x tal que $n < x$ para todo número natural n.
   5. Para todo número natural n, existe um número real x tal que $n \leqslant x$.

Problema 2. Considere os conjuntos abaixo:

F = conjunto de todos os filósofos

M = conjunto de todos os matemáticos

C = conjunto de todos os cientistas

P = conjunto de todos os professores

a) Exprima cada uma das alternativas abaixo usando a linguagem de conjuntos:

1) Todos os matemáticos são cientistas.

2) Alguns matemáticos são professores.

3) Alguns cientistas são filósofos.

4) Todos os filósofos são cientistas ou professores.

5) Nem todo professor é cientista.

b) Faça o mesmo com as afirmativas abaixo:

6) Alguns matemáticos são filósofos.

7) Nem todo filósofo é cientista.

8) Alguns filósofos são professores.

9) Se um filósofo não é matemático, ele é professor.

10) Alguns filósofos são matemáticos.

c) Tomando as cinco primeiras afirmativas como hipóteses, verifique quais das afirmativas do segundo grupo são necessariamente verdadeiras.

Solução:

Sendo que:

F = conjunto de todos os filósofos

M = conjunto de todos os matemáticos

C = conjunto de todos os cientistas

P = conjunto de todos os professores

Simbolicamente, os ítens ficam assim representados.

a) 1) $\mathsf{M} \subset \mathsf{C}$; 2) $\mathsf{M} \cap \mathsf{P} \neq \varnothing$; 3) $\mathsf{C} \cap \mathsf{F} \neq \varnothing$; 4) $\mathsf{F} \subset \mathsf{C} \cup \mathsf{P}$; 5) $\mathsf{P} \cap \mathsf{C}^c \neq \varnothing$

b) 6) $\mathsf{M} \cap \mathsf{F} \neq \varnothing$; 7) $\mathsf{F} \cap \mathsf{C}^c \neq \varnothing$; 8) $\mathsf{F} \cap \mathsf{P} \neq \varnothing$; 9) $\mathsf{F} \subset \mathsf{M} \cup \mathsf{P}$; 10) $\mathsf{F} \cap \mathsf{M} \neq \varnothing$.

c) A única afirmativa verdadeira do segundo grupo é a de número 9).

Problema 3. O diagrama de Venn para os conjuntos X, Y, Z decompõe o plano em oito regiões. Numere essas regiões e exprima cada um dos conjuntos abaixo como reunião de algumas dessas regiões. (Por exemplo: $\mathsf{X} \cap \mathsf{Y} = 1 \cup 2$.)

a) $(\mathsf{X}^c \cup \mathsf{Y})^c$;

b) $(\mathsf{X}^c \cup \mathsf{Y}) \cup \mathsf{Z}^c$;

c) $(\mathsf{X}^c \cap \mathsf{Y}) \cup (\mathsf{X} \cap \mathsf{Z}^c)$;

d) $(\mathsf{X} \cup \mathsf{Y})^c \cap \mathsf{Z}$.

Solução:

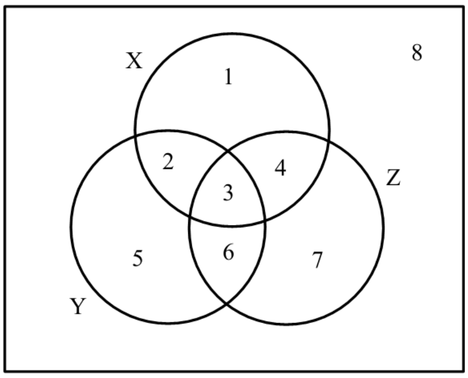

Figura 3.1: Diagrama de Venn - Solução do problema 3. Fonte: O Autor

a) $(\mathsf{X}^c \cup \mathsf{Y})^c = 1 \cup 4$;

b) $1 \cup 2 \cup 3 \cup 4 \cup 5 \cup 6 \cup 7 \cup 8$;

c) $1 \cup 2 \cup 5 \cup 6$;

d) 7.

Problema 4. Observe o slogan de uma cervejaria, utilizado em uma campanha publicitária:

"Se o bar é bom, então o chopp é Tathurana."

Os bares Matriz e Autêntico oferecem a seus clientes chopp das marcas Tathurana e Karakol, respectivamente. Então, de acordo com o slogan anterior, pode-se concluir que:

a) os dois bares são necessariamente bons.

b) o bar Matriz é necessariamente bom e o bar Autêntico pode ser bom ou não.

c) o bar Matriz é necessariamente bom e o bar Autêntico, necessariamente, não é bom.

d) o bar Matriz pode ser bom ou não e o bar Autêntico, necessariamente, não é bom.

e) os dois bares, necessariamente, não são bons.

Solução:

Neste problema temos no slogan em questão uma condicional que faremos uma relação na linguagem de conjuntos com a inclusão. Vejamos.

Considere os conjuntos X formado pelos bares bons e Y formado pelos bares que oferecem o chopp da marca Tathurana. A proposição "Se o bar é bom, então o chopp é Tathurana." fica então assim representado: $\mathsf{X} \subset \mathsf{Y}$.

O bar Matriz oferece chopp da marca Tathurana, então podemos ter (i) $m \in \mathsf{X}$ e portanto $m \in \mathsf{Y}$ ou (ii) $m \in \mathsf{Y}$ e $m \notin \mathsf{X}$. (em que m representa o elemento bar Matriz)

O bar Autêntico oferece chopp da marca Karakol, então só podemos ter que $a \notin \mathsf{X}$. (em que a representa o elemento bar Autêntico)

Usando diagrama de Venn, temos:

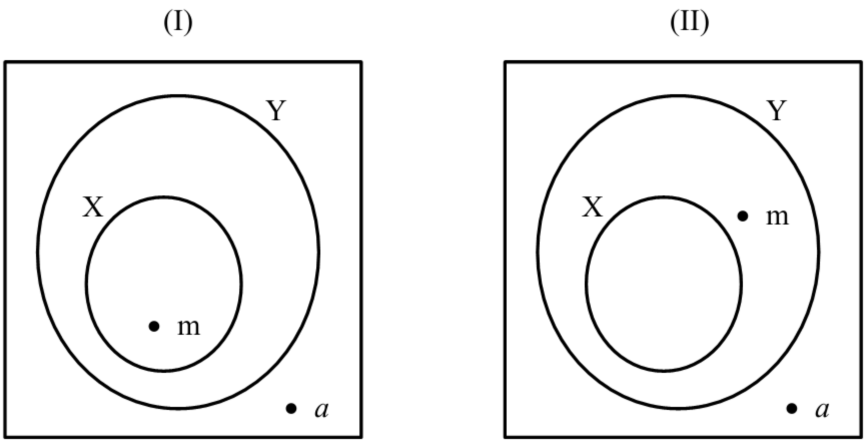

Figura 3.2: Diagrama de Venn - Solução do problema 4. Fonte: O Autor

Concluimos assim que o bar Matriz pode ser bom ou não e o bar Autêntico, necessariamente, não é bom. Logo, a resposta correta é a letra d).

Problema 5.

Considere as premissas:

(P1) Os bebês são ilógicos;

(P2) Pessoas ilógicas são desprezadas;

(P3) Quem sabe amestrar um crocodilo não é desprezado.

Assinale a única alternativa que não é uma consequência lógica das três premissas apresentadas:

a) Bebês não sabem amestrar crocodilos.

b) Pessoas desprezadas são ilógicas.

c) Pessoas desprezadas não sabem amestrar crocodilos.

d) Pessoas ilógicas não sabem amestrar crocodilos.

e) Bebês são desprezados.

Solução:

Definindo os conjuntos:

B : Conjunto de todos os bebês;

I : Conjunto de todos os ilógicos;

D : Conjunto dos desprezados;

A : Conjunto de todos os amestradores de crocodilos;

As premissas P1 e P2 asseguram que $\mathsf{B} \subset \mathsf{I} \subset \mathsf{D}$. A premissa 3 garante que $\mathsf{A} \cap \mathsf{D} = \emptyset$.

Traçando-se os diagramas de Venn dos conjuntos conclui-se que nem todas as pessoas desprezadas são ilógica, sendo a alternativa B a única que não decorre das premissas apresentadas.

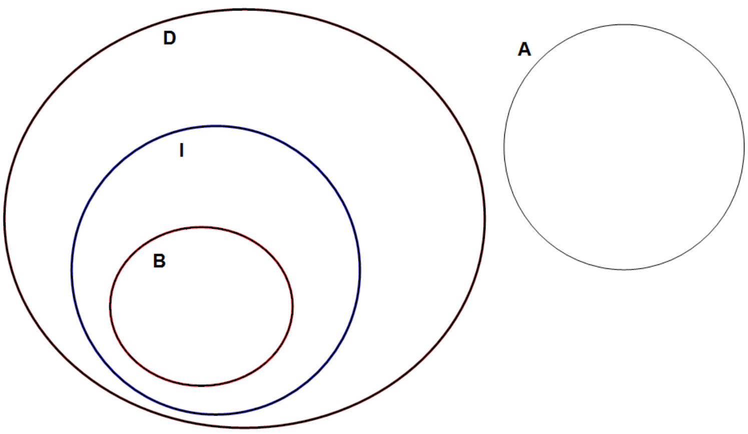

Figura 3.3: Diagrama de Venn - Solução do problema 5. Fonte: O Autor

Problema 6. (AFC/2002) Dizer que não é verdade que Pedro é pobre e Alberto é alto, é logicamente equivalente a dizer que é verdade que:

a) Pedro não é pobre ou Alberto não é alto.

b) Pedro não é pobre e Alberto não é alto.

c) Pedro é pobre ou Alberto não é alto.

d) se Pedro não é pobre, então Alberto é alto.

e) se Pedro não é pobre, então Alberto não é alto.

Solução:

Esta questão trata-se da negação (não é verdade que...) de uma *conjunção* "e". Então usando a relação de Morgan, $(\mathsf{A} \cap \mathsf{B})^c = \mathsf{A}^c \cup \mathsf{B}^c$ que significa que a negação de "P e Q" é "não P ou não Q", sendo A o conjunto dos elementos que gozam da propriedade P e B formado pelos elementos que gozam da propriedade Q.

Daí, negando a primeira parte, teremos: Pedro não é pobre. Negando a segunda parte: Alberto não é alto. Finalmente, trocando o "e" por um "ou", concluiremos que:

Não é verdade que Pedro é pobre e Alberto é alto
é equivalente a:
Pedro não é pobre ou Alberto não é alto.

Logo a resposta correta é a letra a).

Problema 7. (AFC-STN/2005) Se Marcos não estuda, João não passeia. Logo:

a) Marcos estudar é condição necessária para João não passear.

b) Marcos estudar é condição suficiente para João passear.

c) Marcos não estudar é condição necessária para João não passear.

d) Marcos não estudar é condição suficiente para João passear.

e) Marcos estudar é condição necessária para João passear.

Solução:

Conforme o que foi aprendido, a estrutura condicional pode ser traduzida também com uso das expressões condição suficiente e condição necessária. Usando essa nomenclatura, tem-se que:

a primeira parte da condicional é uma condição suficiente; e

a segunda parte da condicional é uma condição necessária.

Daí, tomando a sentença "Se Marcos não estuda, então João não passeia", tem-se que:

Marcos não estudar é condição suficiente para João não passear ou

João não passear é condição necessária para Marcos não estudar.

Ocorre que nenhum desses dois resultados possíveis acima consta entre as opções de resposta! Daí, ainda resta uma saída: ter que encontrar uma condicional equivalente à esta da questão. Qual seria?

Amprendeu-se que quando se trata de complementar de um conjunto vale a equivalência $\mathsf{A} \subset \mathsf{B} \Longleftrightarrow \mathsf{B}^c \subset \mathsf{A}^c$ que transcrevendo na forma de implicação lógica significa que $P \Longrightarrow Q$ se, e somente se, $\sim Q \Longrightarrow \sim P$. Note que foram relacionados aqui os conjuntos A e B com as propriedades P e Q de forma análoga ao problema anterior e também será feito para os outros problemas desta seção.

Desta forma tem-se:

"Se Marcos não estuda, então João não passeia".

é equivalente a

"Se João passeia, então Marcos estuda."

Foram feitas as duas negativas e trocou-se a ordem. Daí, agora analisando esta condicional equivalente, conclui-se que: João passear é condição suficiente para Marcos estudar ou Marcos estudar é condição necessária para João passear.

Logo, a resposta correta é a letra E.

Problema 8. (SERPRO/96) Uma sentença logicamente equivalente a "Pedro é economista, então Luísa é solteira" é:

a) Pedro é economista ou Luísa é solteira.

b) Pedro é economista ou Luísa não é solteira.

c) Se Luísa é solteira, Pedro é economista;

d) Se Pedro não é economista, então Luísa não é solteira;

e) Se Luísa não é solteira, então Pedro não é economista.

Solução:

A questão trouxe uma condicional e pediu uma proposição equivalente. Novamente essa proposição faz lembrar da equivalência $\mathsf{A} \subset \mathsf{B} \iff \mathsf{B}^c \subset \mathsf{A}^c$ que lembra também a equivalência lógica $\sim Q \Longrightarrow \sim P$. O que se deve entender é que para a proposição "Pedro é economista, então Luísa é solteira", deve-se negar a primeira proposição "Pedro não é economista", negar a segunda "Luísa não é solteira" e trocar a ordem. Daí tem-se que

"Pedro é economista, então Luísa é solteira"

é equivalente a

"Se Luísa não é solteira, então Pedro não é economista."

Logo, a resposta correta é a letra E.

Problema 9. (TCE-ES/2004/CESPE) Julgue os itens a seguir:

Item 1. A seguinte argumentação é inválida.

Premissa 1: Todo funcionário que sabe lidar com orçamento conhece contabilidade.

Premissa 2: João é funcionário e não conhece contabilidade.

Conclusão: João não sabe lidar com orçamento.

Item 2. A seguinte argumentação é válida.

Premissa 1: Toda pessoa honesta paga os impostos devidos.

Premissa 2: Carlos paga os impostos devidos.

Conclusão: Carlos é uma pessoa honesta.

Solução:

Para resolver essa questão será utilizada a ideia de subconjuntos e o raciocínio será representado através do diagrama de Venn.

Para o **Item 1** tem-se que:

O : Conjunto de todos os funcionários que sabem lidar com orçamento;

C : Conjunto de todos os funcionários que conhecem contabilidade;

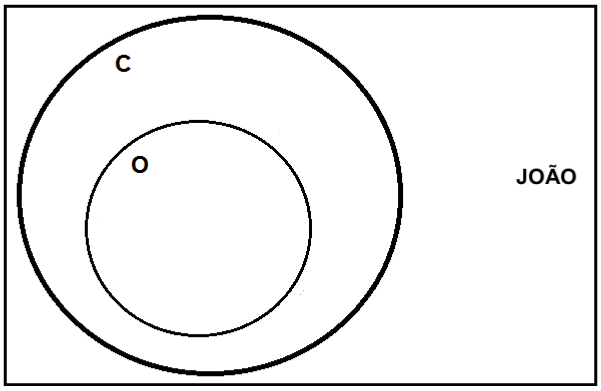

Figura 3.4: Diagrama de Venn - Solução do problema 9 Item 1. Fonte: O Autor

A conclusão nos diz que João não sabe lidar com orçamento, logo, o argumento é válido. Como a questão afirma que a argumentação é inválida, teremos que o item é ERRADO.

Para o **Item 2** temos que:

P : Conjunto das pessoas que pagam impostos;

C : Conjunto das pessoas honestas;

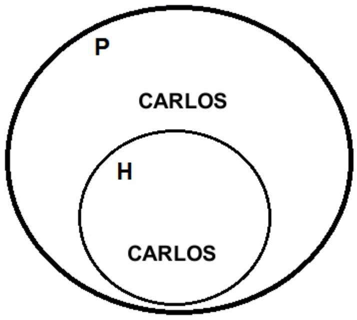

Figura 3.5: Diagrama de Venn - Solução do problema 9 Item 2. Fonte: O Autor

Carlos não necessariamente é uma pessoa honesta. Vejam que ele pode estar simplesmente dentro do círculo maior (azul) e sem tocar o menor (vermelho). Daí, o argumento é inválido. Como a questão diz que é válido, o item está ERRADO.

Problema 10. Se todo marinheiro é republicano e nenhum republicano é ateu, é possível concluir, corretamente, que:

a) nenhum republicano é marinheiro.

b) todo marinheiro é ateu.

c) todo ateu é republicano.

d) nenhum marinheiro é ateu.

e) todo republicano é marinheiro.

Solução:

Definindo os conjuntos:

M : Conjunto de todos os marinheiros;

R : Conjunto de todos os republicanos;

A : Conjunto de todos os ateus;

A proposição "todo marinheiro é republicano" garante que $\mathsf{M} \subset \mathsf{R}$ e a proposição "nenhum republicano é ateu" diz que $\mathsf{R} \cap \mathsf{A} = \emptyset$. Pode-se entender melhor através do diagrama:

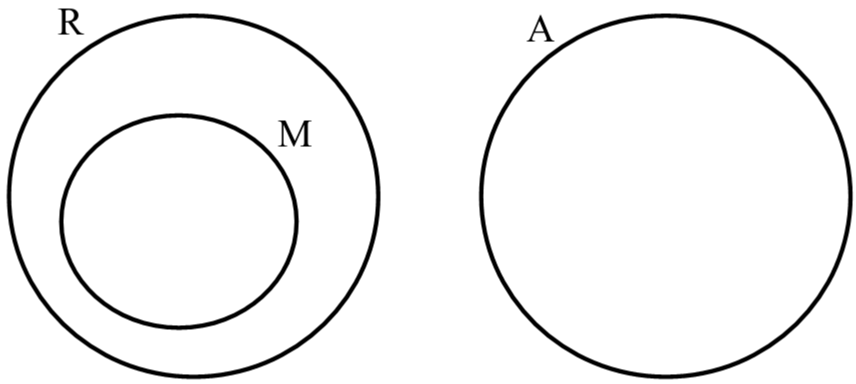

Figura 3.6: Diagrama de Venn - Solução do problema 10. Fonte: O Autor

Conclui-se que Nenhum marinheiro é ateu. Letra d.

Problema 11 Quem tem coragem é virtuoso, e quem não é justo, não é virtuoso. Logo,

a) quem é justo, tem coragem.

b) quem é justo, é virtuoso.

c) quem é virtuoso, tem coragem.

d) quem tem coragem, é justo.

e) quem é virtuoso, não tem coragem.

Solução:

Sejam os conjuntos:

C : conjunto dos que tem coragem.

V : conjunto dos virtuosos.

I : conjunto dos que não são justos.

U : conjunto universo.

a, b, c, d sendo os elementos (pessoas)

Pela proposição do problema "Quem tem coragem é virtuoso, e quem não é justo, não é virtuoso." e considerando os conjuntos pode-se transcrever a proposição usando conjuntos da seguinte forma:

$$C \subset V \text{ e } V \cap I = \emptyset$$

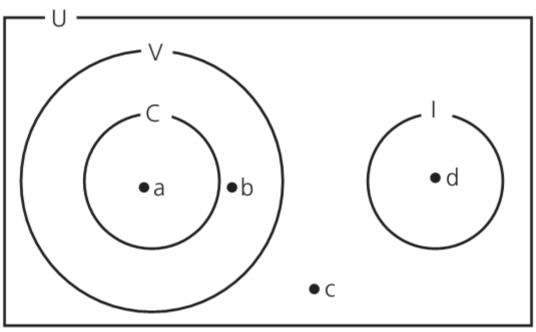

Figura 3.7: Diagrama de Venn - Solução do problema 11. Fonte: O Autor

Pelos diagramas, tem-se que:

a) Falso, note que b e c são justos, nem por isso têm coragem.

b) Falso, note que c é justo, nem por isso é virtuoso.

c) Falso, note que b é virtuoso, mas não tem coragem.

d) Necessariamente verdadeira, uma vez que a tem coragem e não pertence ao conjunto I.

e) Falso, note que a é virtuoso e tem coragem.

Logo, a resposta correta é a letra D.

Problema 12. Um locutor de rádio, durante um fim de tarde, fez a seguinte afirmação:

"Sempre que chove em São Paulo, o trânsito fica complicado e as pessoas chegam mais tarde em casa."

Supondo verdadeira a afirmação do locutor, pode-se concluir a partir dela que, necessariamente,

a) se o trânsito em São Paulo está complicado, então está chovendo.

b) se as pessoas de São Paulo estão chegando mais tarde em casa, então o trânsito está complicado.

c) se as pessoas de São Paulo estão chegando mais tarde em casa, então está chovendo.

d) se o tempo em São Paulo está bom, então o trânsito não está complicado.

e) se o trânsito em São Paulo não está complicado, então o tempo está bom.

Solução

Transcrevendo o enunciado usando a linguagem dos conjuntos. Observe os diagramas (que estão de acordo com a afirmação do locutor de rádio).

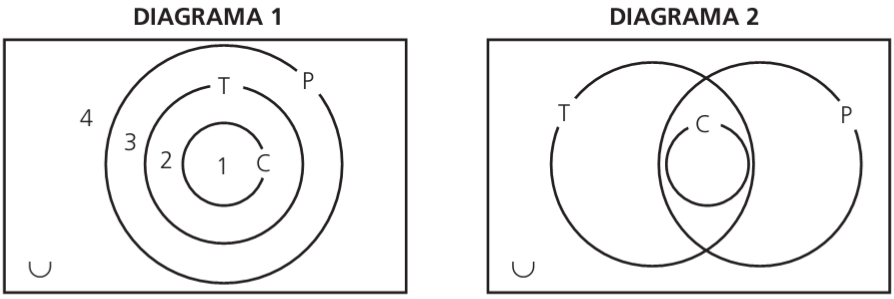

Figura 3.8: Diagrama de Venn - Solução do problema 12. Fonte: O Autor

Onde:

C : chove em São Paulo

T : o trânsito fica complicado.

P : pessoas chegam mais tarde em casa.

Observe que qualquer dos dois diagramas podem ser utilizados para resolver o exercício. Considerando o diagrama 1, que possui as regiões numeradas de 1 a 4.

Dessa forma, analisando os diagramas, entende-se que a única opção verdadeira é a *alternativa e) se o trânsito em São Paulo não está complicado, então o tempo está bom.* Veja regiões 3 e 4.

Capítulo 4

Considerações Finais

Este trabalho apresentou uma proposta de ensino com abordagem dos conceitos de conjuntos e lógica pelo fato de versar sobre os fundamentos básicos da Lógica, os quais são fundamentais para o formalismo e a abstração, tão requeridos pela Matemática.

Teve como objetivo abordar os fundamentos da Lógica em paralelo ao conceito de Conjuntos, pois decidiu-se abordar os dois conteúdos conectados, por ser oportuno para o aluno, visto que os símbolos e os conceitos da Lógica, como por exemplo: conectivos e equivalências, já estão presentes nos primeiros conteúdos das séries iniciais do Ensino Médio sem uma explicação prévia.

Os conceitos de Lógica e de Conjuntos foram apresentados da forma mais natural e elementar possível, utilizando um para explicar o outro. Culminamos numa proposta de atividades que traz de forma motivacional exercícios interessantes de lógica resolvidos na linguagem de conjuntos, fazendo sempre equivalência entre conceitos relativos a conjuntos e conectivos lógicos.

Propõe-se ainda o aproveitamento e continuidade deste estudo afim de contribuir para a solidificação e melhoria do ensino de matemática na rede pública, preparando os alunos oriundos do ensino médio para posteriores concursos públicos e ingresso em universidades.

Bibliografia

[1] ALENCAR FILHO, E. de, Iniciação à Lógica Matemática. São Paulo: Nobel, 2002.

[2] BARROS, A. J. P.; LCHFELD, N. A. S. Fundamentos da metodologia: um guia para iniciação científica. São Paulo: Mc Graw-Hill, 1986.

[3] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental.Parâmetros Curriculares Nacionais : Matemática. Brasília: MEC /SEF, 1998. Disponível em <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf> Acesso em 06 ago 2016.

[4] IEZZI, G.; MURAKAMI, C. Fundamentos de Matemática Elementar Volume 1. São Paulo: Atual Editora, 2004.

[5] LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. A Matemática do Ensino Médio-Volume 1. 10.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[6] LIMA, E. L. Números e Funções Reais. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[7] Noções básicas sobre metodologia de pesquisa científica. Disponível em: ¡http://mba.eci.ufmg.br/downloads/metodologia.pdf¿. Acesso em 06 ago 2016.

[8] PAIVA, M. Matemática Volume 1. São Paulo: Moderna, 2006.

[9] PAIVA, M. Matemática Volume 1. São Paulo: Moderna, 2010.

[10] SOUZA, J. R. de Novo olhar Matemática Volume 1. São Paulo: FTD, 2011.