Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT

# Matemática Financeira e os Sistemas de Financiamentos no cotidiano

**Bruno Oliveira de Sousa**

**Teresina**
**2016**

Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Departamento de Matemática

# Matemática Financeira e os Sistemas de Financiamentos no cotidiano

**Bruno Oliveira de Sousa**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática

Orientador
**Prof. Dr. João Benício de Melo Neto**

**Teresina**
**2016**

FICHA CATALOGRÁFICA
Serviço de Processamento Técnico da Universidade Federal do Piauí
Biblioteca Setorial do CCN

S725m Sousa, Bruno Oliveira de.
Matematica financeira e sistemas de financiamentos no cotidiano / Bruno de Oliveira Sousa. – Teresina, 2016.
63f.: il.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Piauí, Centro de Ciências da Natureza, Pós-Graduação em Matemática, 2016.
Orientador: Prof. Dr. João Benício de Melo Neto

1. Matemática Financeira. 2.Regime de Capitalização. I. Título

CDD 513.93

PROFMAT

SBM

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
CENTRO DE EDUCAÇÃO ABERTA E À DISTÂNCIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

Dissertação de Mestrado submetida à coordenação Acadêmica Institucional, na Universidade Federal do Piauí, do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional para obtenção do grau de **mestre em matemática** intitulada: **Matemática Financeira e os Sistemas Financeiros no Cotidiano**, defendida por **Bruno Oliveira de Sousa** em **30 / 08 / 2016** e aprovada pela banca constituída pelos professores:

João Benício de Melo Neto

**Dr. João Benício de Melo Neto (UFPI)**
Presidente da Banca examinadora

**Me. Mário Gomes dos Santos (UFPI)**
Examinador Interno

Roberto Arruda Lima Soares

**Dr. Roberto Arruda Lima Soares (IFPI)**
Examinador Externo

*Dedico este trabalho primeiramente a Deus, por ser essencial em minha vida, autor de meu destino, meu guia, socorro presente na hora da angústia, a minha noiva Talila, ao meu pai Ribamar, minha mãe Marilac e aos meus irmãos e sobrinhas.*

# Agradecimentos

Primeiramente à DEUS que permitiu que tudo isso acontecesse ao longo de minha vida, e não somente nestes anos como universitário, mas que em todos os momentos é o maior mestre que alguém pode conhecer.

À UFPI pelo ambiente criativo e amigável que proporciona.

Ao PROFESSOR Dr. João Benício de Melo pela oportunidade e apoio na elaboração deste trabalho.

Aos meus PAIS Ribamar e Marilac, pelo amor, incentivo e apoio incondicional.

A minha NOIVA Talila, pelo companheirismo em todos os momentos.

À Sociedade Brasileira de Matemática pela idealização desse mestrado que melhora a formação do professor de Matemática do Ensino Básico e o ensino de Matemática.

A todos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação, o meu muito obrigado.

*"Não te enganes achando que o dinheiro pode comprar sua independência, isto você encontrará apenas, quando chegar à sabedoria suficiente para concretizar a paz de seu espírito".*
*(Ivan Teorilang)*

# Resumo

O presente trabalho tem como objetivo proporcionar uma melhor compreensão dos conteúdos ligados à Matemática Financeira, tomando como base algumas situações reais de financiamento e utilizando como metodologia a identificação dos principais conceitos em aplicações no cotidiano. Para isso, fizemos uma breve revisão dos conteúdos que falam de razão, proporção, porcentagem, função afim e função exponencial, conteúdos estes, indispensáveis para o bom entendimento do tema em questão, em seguida, foram mostradas as principais definições relacionadas aos regimes de capitalização simples e composta, exemplificando cada tipo e verificando o comportamento destes sistemas graficamente, na sequência, trabalhamos com o cálculo de valores futuros e presentes em situações que envolvem aplicações periódicas de certos valores e mostramos os sistemas de amortizações PRICE e SAC identificando os principais conceitos relacionados ao presente tema em situações reais. Por fim, concluímos que trabalhando com situações do cotidiano, o aluno desperta uma maior curiosidade, facilitando assim, o seu entendimento no tema em questão.

**Palavras-chave:** Matemática Financeira. Regime de Capitalização. Sistemas de Amortização. PRICE. SAC.

# Abstract

This paper aims to provide a better understanding of the contents related to Financial Mathematics, based on some real situations of financing and using as a methodology to identify the main concepts in everyday applications. For this, we made a brief review of the contents that speak ratio, proportion, percentage, related function and exponential function, content these are indispensable for the good understanding of the theme in question, then were shown the main settings related to funded schemes simple and composed, exemplifying each type and checking the behavior of these systems graphically, as a result, we work with the calculation of future and present values in situations involving periodic applications of certain values and show the PRICE amortization systems and SAC identifying key concepts related to this theme in real situations. Finally, we concluded that working with everyday situations, the student awakens greater curiosity, thus facilitating their understanding on the issue at hand.

**Keywords:** Financial Mathematics. Capitalization regime. Amortization systems. PRICE. SAC .

# Lista de Figuras

# Sumário

# Introdução

A disciplina Matemática é tratada por muitos alunos como um terror no ensino médio, muitas vezes presenciamos questionamentos de alunos alegando que alguns assuntos relacionados à disciplina não servem para nada em nossa vida, pois bem, o nosso papel enquanto professores de matemática é banir esta rejeição psicológica, pois ela é uma das principais barreiras no processo de ensino-aprendizagem dos alunos em relação aos conteúdos matemáticos. Uma boa estratégia para isso seria mostrar que é possível utilizarmos conhecimentos matemáticos na resolução de problemas em nosso cotidiano.

O presente trabalho trata dos conceitos básicos de Matemática Financeira. Para Zentgraf (2006) a Matemática Financeira é o ramo da matemática responsável pelo estudo da evolução do dinheiro ao longo do tempo e que estabelece relações formais entre quantias expressas em datas distintas (p.2). Este ramo da matemática, que é tão mal explorado nos conteúdos de ensino médio, representa um dos maiores exemplos da aplicação de conhecimentos matemáticos na resolução de problemas em nosso cotidiano.

O principal objetivo deste trabalho é proporcionar uma melhor compreensão dos conteúdos ligados à Matemática Financeira e facilitar o entendimento das principais definições relacionadas ao assunto, como regimes de capitalização simples e compostos, taxas proporcionais, taxas equivalentes, taxas nominais e amortização.

No capítulo 1, fizemos uma breve revisão dos conteúdos que falam de razão, proporção, porcentagem, função afim e função exponencial, conteúdos estes, indispensáveis para o bom entendimento do tema em questão.

No capítulo 2, foram mostradas as principais definições relacionadas aos regimes de capitalização simples e composta, exemplificando cada tipo e verificando o comportamento destes sistemas graficamente, além disso, baseado nas caracterizações das funções afins e exponenciais, verificamos que o regime de capitalização simples comporta-se como uma função afim, enquanto que o regime de capitalização composta tem o comportamento de uma função exponencial.

Na sequência, no capítulo 3, trabalhamos com o cálculo de valores futuros e valores presentes em situações que envolvem aplicações periódicas de certos valores.

Em seguida, no capítulo 4, mostramos os sistemas de amortizações PRICE e SAC e identificamos os principais conceitos relacionados ao presente tema em situações reais no capítulo 5.

Enfim, no capítulo 6, seguem as considerações finais acerca do trabalho, enfatizando a importância da abordagem prática dos conteúdos de Matemática Financeira no ensino básico.

# 1 Razão, Proporção, Grandezas, Porcentagem, Função Afim e Função Eexponencial

Para um domínio pleno dos assuntos de matemática financeira, faz-se necessário um bom entendimento dos assuntos indicados nesta seção. Segue abaixo uma breve explanação do conteúdo juntamente com alguns exemplos e aplicações.

## 1.1 Razão

**Definição**: Define-se a razão entre dois números $a$ e $b$, com $b \neq 0$, como o quociente de $a$ por $b$.

Representamos por $\dfrac{a}{b}$ ou $a : b$ e lemos $a$ para $b$, o nome dado ao termo $a$ é antecedente, já o termo $b$ chama-se consequente.

Ex: A razão de 2 para 10 é:

$$\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

## 1.2 Proporção

**Definição**: Dados quatro números $a$, $b$, $c$ e $d$ com $b \neq 0$ e $d \neq 0$, na ordem dada, afirmamos que eles formam uma proporção quando a razão entre os dois primeiros é igual a razão entre os dois último.

Representamos por $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ e lemos $a$ está para $b$, assim como $c$ está para $d$. Os termos $a$ e $d$ são chamados de extremos, já os termos $b$ e $c$ chamam-se meios.

**Propriedades**:

**P1** Numa proporção, o produto dos meios é igual ao produto dos extremos.

*Demonstração*

Seja a proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, como $b \neq 0$ e $d \neq 0$, temos que $bd \neq 0$, logo, multiplicando ambos os membros da igualdade por $bd$, temos:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{b} \cdot bd = \frac{c}{d} \cdot bd \Leftrightarrow ad = bc \tag{1.1}$$

Ex: 2 está para 10 assim como 1 está para 5.

$$\frac{2}{10} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow 2 \cdot 5 = 10 \cdot 1 \tag{1.2}$$

**P2** Em uma série de razões iguais, o somatório dos antecedentes está para o somatório dos consequentes, assim como um antecedente qualquer está para o seu consequente.

*Demonstração*

Seja a série:

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = ... = \frac{x}{y}$, tomando a razão comum igual a $k$, obtemos:

$\frac{a}{b} = k, \frac{c}{d} = k, \frac{e}{f} = k, ..., \frac{x}{y} = k$, daí $a = bk$, $c = dk$, $e = fk$, ..., $x = yk$

Somando membro a membro temos:

$(a + c + e + ... + x) = k(b + d + f + ... + y)$, logo $\frac{a + c + e + ... + x}{b + d + f + ... + y} = k$

Como:

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = ... = \frac{x}{y} = k$, segue que:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = ... = \frac{x}{y} = \frac{a+c+e+...+x}{b+d+f+...+y} \tag{1.3}$$

**P3** Se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, então $\frac{a \pm b}{a} = \frac{c \pm d}{c}$

*Demonstração*

Vamos demonstrar que se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, então $\frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c}$, as demais demonstrações são feitas de maneira análoga.

Seja a proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, somando-se 1 a cada membro da igualdade obtemos:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1 \Leftrightarrow \frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c} \tag{1.4}$$

**P4** Se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, com $bd \neq 0$, então $\frac{ac}{bd} = \frac{a^2}{b^2} = \frac{c^2}{d^2}$.

*Demonstração*

Vamos demonstrar que se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, então $\frac{ac}{bd} = \frac{a^2}{b^2}$, o restante é feito de maneira análoga.

Seja a proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, como como $b \neq 0$ e $d \neq 0$, multiplicando-se $\frac{a}{b}$ a cada membro da igualdade obteremos:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b} \Leftrightarrow \frac{ac}{bd} = \frac{a^2}{b^2} \tag{1.5}$$

## 1.3 Grandezas

**Definição**: Grandeza é algo que pode ser medido ou contado, elas podem ter suas medidas ou contagens variando para mais ou para menos.

### 1.3.1 Grandezas Diretamente Proporcionais

**Definição**: Dadas duas ou mais grandezas, dizemos que elas são diretamente proporcionais quando, variam sempre na mesma razão, ou seja, aumentando ou diminuindo uma delas, a outra também aumenta ou diminui na mesma razão da anterior. Duas grandezas diretamente proporcionais possuem como característica o fato de que a razão entre os valores de uma delas é igual a razão entre os valores da outra.

Sendo $(a,\, b)$ e $(x,\, y)$ pares de duas grandezas diretamente proporcionais, então:

$$\frac{a}{b} = \frac{x}{y} \Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = k \Leftrightarrow a = kx; b = ky \tag{1.6}$$

### 1.3.2 Grandezas Inversamente Proporcionais

**Definição**: Dadas duas ou mais grandezas, dizemos que elas são inversamente proporcionais quando, aumentando ou diminuindo uma delas, a outra diminui ou aumenta na mesma razão da anterior. Duas grandezas inversamente proporcionais possuem como característica o fato de que a razão entre os valores de uma delas é igual ao inverso da razão entre os valores da outra.

Sendo $(a,\, b)$ e $(x,\, y)$ pares de duas grandezas inversamente proporcionais, então:

$$\frac{a}{b} = \frac{y}{x} \Leftrightarrow ax = by = k \Leftrightarrow a = k \cdot \frac{1}{x}; b = k \cdot \frac{1}{y} \tag{1.7}$$

OBS: Uma grandeza pode ser comparada a duas ou mais grandezas, neste caso ela será proporcional a várias outras, podendos ser inversamente ou diretamente proporcional a cada uma delas. Neste caso, se $(a,\, b)$ é diretamente proporcional a $(x,\, y)$ e é inversamente proporcional a $(r,\, s)$, então:

$$a = k \cdot x \cdot \frac{1}{r}; b = k \cdot y \cdot \frac{1}{s} \tag{1.8}$$

**Aplicação**: Uma das maiores aplicações para divisão proporcional é a chamada **regra da sociedade**, ela tem como principal característica a divisão dos lucros ou prejuízos de uma certa operação entre as pessoas que formam uma sociedade, esta divisão se dá principalmente por conta do Balanço geral anual ou por conta da saída de um dos sócios ou mesmo a admissão de um novo membro na sociedade. Segue um exemplo abaixo sobre a divisão de cotas de uma empresa seguindo algumas condições.

Ex: Um grande empresário distribuiu R$ 36.000,00 entre seus 3 filhos. A divisão foi feita em partes diretamente proporcionais ao tempo de serviço de cada um deles na empresa e, ao mesmo tempo, inversamente proporcionais ao número de filhos que cada um deles possui. O primeiro filho tem 6 anos de firma e possui 2 filhos, o segundo 8 anos e 4 filhos; o terceiro, 12 anos e 3 filhos. Quanto recebeu cada um?

SOLUÇÃO:

Sendo $X$ a parte referente ao primeiro filho, $Y$ a parte do segundo e $Z$ a parte do terceiro filho, temos:

$X + Y + Z = 36.000$

Sendo $Tx$, $Ty$, $Tz$, $Nx$, $Ny$ e $Nz$, respectivamente, os tempos de serviço e o número de filhos de cada um dos que receberão o dinheiro. Temos pelo fato de as grandezas serem diretamente e inversamente proporcionais a seguinte expressão:

$$X = k \cdot \frac{Tx}{Nx} \Rightarrow X = k \cdot \frac{6}{2} \Rightarrow X = 3k$$
$$Y = k \cdot \frac{Ty}{Ny} \Rightarrow Y = k \cdot \frac{8}{4} \Rightarrow X = 2k$$
$$Z = k \cdot \frac{Tz}{Nz} \Rightarrow Z = k \cdot \frac{12}{3} \Rightarrow X = 4k$$

De $X + Y + Z = 36.000$, segue que $3k + 2k + 4k = 36.000 \Rightarrow k = 4000$

Logo, o primeiro filho recebeu R$12.000,00, o segundo recebeu R$8.000,00 e o terceiro recebeu R$16.000,00.

## 1.4 Porcentagem

**Definição**: Porcentagem nada mais é do que uma razão onde o consequente vale 100, pode-se dizer também que é a proporção de uma grandeza em relação a uma outra avaliada através de centenas.

Representamos por $X\%$ ou $\frac{X}{100}$ e lemos $X$ por cento. O numeral $X\%$ é denominado taxa percentual.

O símbolo % surgiu por volta do século XV como uma abreviatura da palavra cento utilizada nas operações mercantis.

Ex:

- $\frac{3}{5} = \frac{60}{100} = 60\%$
- $0,3 = \frac{3}{10} = \frac{30}{100} = 30\%$
- $(30\%)^2 = (\frac{30}{100})^2 = \frac{900}{10000} = \frac{9}{100} = 9\%$

O CÁLCULO DE PORCENTAGENS

Tomando a seguinte legenda:

- $P$: O valor principal;
- $p$: O valor que representaremos em termos percentuais;
- $x$: A taxa percentual.

Segue que:

$$\frac{p}{P} = \frac{x}{100} \tag{1.9}$$

Observe que o cálculo de porcentagens se torna bem simples quando se usa a ideia de razão e proporção. Desta maneira o aluno utiliza outras maneiras para realizar o referido cálculo não utilizando a já tão "batida"regra de três.

Ex1: Um vendedor tem 5% de comissão em cima de suas vendas do mês. Sabendo que o mesmo vendeu R$ 50.000,00 em um determinado mês, qual será sua comissão?

SOLUÇÃO:

Sendo $p$ o valor da comissão, temos:

$$\frac{p}{50.000} = \frac{5}{100} \Rightarrow p = R\$2.500.00$$

Ex2: Um certo objeto foi adquirido por R$ 3.000,00 e planeja-se vende-lo por R$ 3.450,00. Qual a porcentagem do lucro?

SOLUÇÃO:

Sendo $p$ o valor do lucro temos que:

$p = 3450 - 3000 \Rightarrow p = 450$, logo:

$$\frac{450}{3000} = \frac{x}{100} \Rightarrow x = 15\%$$

### 1.4.1 Taxa Unitária

A taxa percentual refere-se a uma razão cuja referência é 100, isto é:

$$32\% = \frac{32}{100}$$

Porém, em algumas situações, é mais prático tomar como valor referencial a unidade, desta maneira encontramos a taxa unitária.

Ex:

$$32\% = \frac{32}{100} = \frac{i}{1} \Rightarrow i = 0,32$$

### 1.4.2 Fator de Correção

Quando se aplica, percentualmente a uma taxa $i$, um único aumento ou uma única redução a um valor inicial $C$, dizemos que este valor foi corrigido, o valor resultante é o montante acumulado $M$. De maneira prática, procedemos da seguinte maneira:

$$M = C \pm iC \Rightarrow M = C \cdot (1 \pm i)$$

O termo $(1 \pm i)$ é o que chamamos de fator de correção, e neste caso, utilizando-se a taxa na forma unitária, podemos determinar facilmente este fator de correção. Se este fator for maior que 1, significa que este capital sofreu acréscimo, caso contrário, se o fator for menor que 1, significa que o capital sofreu decréscimo.

Ex: O preço de um certo produto acompanha a variação mensal do dólar em relação ao real, um produto que custa R$ 100,00 foi corrigido por 2 meses seguidos, sabendo que no primeiro mês o dólar subiu 10% e no segundo mês caiu 5%, qual o novo preço deste produto?

SOLUÇÃO:

Para resolver este problema analisaremos 2 momentos distintos, sendo que cada momento representa uma correção em função do dólar. Como no primeiro momento o dólar subiu, significa que o preço sofreu acréscimo, e como no segundo mês o dólar caiu, significa que o preço sofreu decréscimo.

MOMENTO 1:

$C = 100$

$i = 10\% = 0,1$

$$M = C \cdot (1 + i) \Rightarrow M = 100 \cdot (1 + i) \Rightarrow M = 100 \cdot 1,1 \Rightarrow M = 110$$

MOMENTO 2:

$C = 110$

$i = 5\% = 0,05$

$$M = C \cdot (1 - i) \Rightarrow M = 110 \cdot (1 - 0,05) \Rightarrow M = 110 \cdot 0,95 \Rightarrow M = 104,50$$

O resultado acima mostra que ao final dos 2 meses o produto passou a custar R$ 104,50, ou seja, foi corrigido sofrendo um acréscimo de 4,5% em relação ao valor inicial.

## 1.5 Função Afim

**Definição**: Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se afim quando existem constantes $a$, $b \in \mathbb{R}$ tais que $f(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Nesta seção, nosso objetivo será mostrar a caracterização da função afim, para isso, primeiro teremos que tomar conhecimento do Teorema Fundamental da Proporcionalidade conforme segue abaixo.

**Teorema 1.1** (Teorema Fundamental da Proporcionalidade). *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função crescente. As seguintes afirmações são equivalentes:*

*(1) $f(nx) = nf(x)$ $\forall n \in \mathbb{Z}$ e $\forall x \in \mathbb{R}$.*

*(2) Tomando $a = f(1)$, tem-se $f(x) = ax$ $\forall x \in \mathbb{R}$.*

*(3) $f(x + y) = f(x) + f(y)$ para quaisquer $x$, $y \in \mathbb{R}$.*

*Demonstração*

(1) $\Rightarrow$ (2)

Provemos inicialmente que para todo número racional $r = \dfrac{p}{q}$ a hipótese (1) nos leva a concluir que $f(rx) = r \cdot f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. De fato, temos que:

$$q \cdot f(rx) = f(q \cdot rx) = f(px) = p \cdot f(x) \Rightarrow f(rx) = \frac{p}{q} \cdot f(x) \Rightarrow f(rx) = r \cdot f(x)$$

Tomando $a = f(1)$, como $f(0) = f(0 \cdot 0) = 0 \cdot f(0) = 0$, o fato de a função ser crescente nos garante que $a = f(1) > f(0) = 0$. Logo $a$ é positivo. Temos também que $f(r) = f(r \cdot 1) = r \cdot f(1) = r \cdot a = a \cdot r$ para todo $r$ racional.

Provaremos agora que $f(x) = a \cdot x$ para todo $x$ real. Supondo por absurdo que exista algum número real $x$ tal que $f(x) \neq a \cdot x$, admitindo $f(x) < a \cdot x$ (o caso $f(x) > a \cdot x$ é feito de maneira análoga), teríamos:

$\dfrac{f(x)}{a} < x$, tomando um número racional $r$ tal que $\dfrac{f(x)}{a} < r < x \Rightarrow f(x) < ar < ax \Rightarrow f(x) < f(r) < ax$. Absurdo, pois como a função é crescente deveríamos ter $r < x \Rightarrow f(r) < f(x)$. Logo $f(x) = ax$ para todo $x$ real.

(2) $\Rightarrow$ (3)

Por (2) temos que $f(x + y) = a(x + y) = ax + ay = f(x) + f(y)$.

(3) $\Rightarrow$ (1)

Por (3) fica evidente que $f(nx) = nf(x)$ para todo $n$ natural e $x$ real. Temos também que $f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0) \Rightarrow f(0) = 0$. Mas, se $n \in \mathbb{N}$ com

$$0 = f(0) = f(-nx + nx) = f(-nx) + f(nx) \Rightarrow f(-nx) = -f(nx) \Rightarrow f(-nx) = -nf(x).$$

Logo, $f(nx) = nf(x)$ para todo $n$ inteiro e para todo $x$ real.

**Teorema 1.2** (Caracterização da função afim). *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função monótona injetiva. Se o acréscimo $f(x + h) - f(x) = \varphi(h)$ depender apenas de $h$, mas não de $x$, então $f$ é uma função afim.*

*Demonstração*

A demonstração a seguir é uma simples aplicação do Teorema Fundamental da Proporcionalidade. Supondo a função crescente, temos que $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ também é e $\varphi(0) = 0$. Temos também que para $h, k \in \mathbb{R}$, temos:

$$\varphi(h+k) = f(x+h+k)-f(x) = f((x+k)+h)-f(x+k)+f(x+k)-f(x) = \varphi(h)+\varphi(k).$$

Logo, $\varphi(h + k) = \varphi(h) + \varphi(k)$ e pelo Teorema Fundamental da Proporcionalidade, pondo-se $a = \varphi(1)$, tem-se $\varphi(h) = ah$ para todo $h$ real. Logo, $f(x + h) - f(x) = ah$. Tomando $f(0) = b$, conclui-se que:

$$f(h) - b = ah \Rightarrow f(h) = ah + b.$$

Logo, $f(x) = ax + b$ para todo $x$ real.

## 1.6 Função Exponencial

**Definição**: Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se exponencial quando é indicada pela notação $f(x) = a^x$ com $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ e $a \neq 1$.

**Teorema 1.3** (Caracterização da função exponencial). *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente), as seguintes afirmações são equivalentes:*

*(1) $f(nx) = f(x)^n$ para todo $n$ inteiro e $x$ real;*

*(2)* $f(x) = a^x$ *para todo* $x$ *real, onde* $a = f(1)$*;*

*(3)* $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ *para quaisquer* $x$ *e* $y$ *reais.*

Para fazermos tal demonstração utilizaremos o seguinte lema:

**Lema 1.1.** *Fixado o número real positivo* $a \neq 1$*, em todo intervalo de* $\mathbb{R}^+$ *existe alguma potência* $a^r$*, com* $r \in \mathbb{Q}$*.*

*Demonstração*

(1) $\Rightarrow$ (2)

Vamos mostrar primeiramente que para todo número racional $r = \dfrac{p}{q}$, com $p$, $q \in \mathbb{Z}$, tem-se que $f(rx) = f(x)^r$. De fato, temos que $qr = p$, logo podemos escrever o seguinte:

$$f(rx)^q = f(qrx) = f(px) = f(x)^p, \text{ logo } f(rx) = f(x)^{\frac{p}{q}} = f(x)^r$$

Tomando $f(1) = a$, teremos que $f(r) = f(r \cdot 1) = f(1)^r = a^r$, para todo $r$ racional.

Tomando $f$ como crescente, temos que $1 = f(0) < f(1) = a$. Supondo por absurdo que exista algum número real $x$ tal que $f(x) \neq ax$, admitindo $f(x) < a^x$ (o caso $f(x) > a^x$ é feito de maneira análoga), então pelo Lema citado anteriormente, teríamos que existe um número racional $r$ tal que $f(x) < a^r < a^x$. Ou seja, como a função é crescente teríamos $f(x) < f(r) \Rightarrow x < r$, porém, teríamos também da desigualdade que $a^r < a^x \Rightarrow f(r) < f(x) \Rightarrow r < x$, o que representa uma contradição. Logo $f(x) = a^x$ para todo $x$ real, com $a = f(1)$.

(2) $\Rightarrow$ (3)

Por (2) temos que $f(x+y) = a^{x+y} = a^x \cdot a^y = f(x) \cdot f(y)$ para quaisquer $x$ e $y$ reais.

(3) $\Rightarrow$ (1)

Tomando $f(x) = a^x$, por (3) temos que:

$f(x+y) = f(x) \cdot f(y) \Rightarrow [f(x+y)]^n = [f(x)]^n \cdot [f(y)]^n \Rightarrow$

$$[f(x+y)]^n = (a^x)^n \cdot (a^y)^n = a^{nx} \cdot a^{ny} = a^{n(x+y)} \Rightarrow [f(x+y)]^n = f[n(x+y)]$$

**Teorema 1.4** (Caracterização das funções do tipo exponencial). *Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente) tal que, para $x$ e $h$ reais quaisquer, o acréscimo relativo $\dfrac{g(x+h)-g(x)}{g(x)} = \varphi(h)$ dependa apenas de $h$, mas não de $x$, então, se $b = g(0)$ e $a = \dfrac{g(1)}{g(0)}$, tem-se $g(x) = b \cdot a^x$ para todo $x$ real.*

*Demonstração*

Temos que a hipótese acima equivale a afirmar que $\varphi(h) = \dfrac{g(x+h)}{g(x)}$ independe de $x$. Substituindo $g(x)$ por $f(x) = \dfrac{g(x)}{b}$, onde $b = g(0)$, $f$ continua monótona e injetiva, com $\dfrac{f(x+h)}{f(x)}$ independente de $x$ e, agora, com $f(0) = 1$. Então, pondo $x = 0$ na relação $\varphi(h) = \dfrac{f(x+h)}{f(x)}$, obtemos $\varphi(h) = f(h)$ para todo $h$ real. Vemos assim que a função monótona e injetiva $f$ cumpre $f(x+h) = f(x) \cdot f(h)$, ou seja, $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ para quaisquer $x$ e $y$ reais. Segue-se então do teorema anterior que $f(x) = a^x$, logo $g(x) = b \cdot f(x) = b \cdot a^x$, como queríamos demonstrar.

# 2 Juros

**Definição**: Juros é a remuneração ou recompensa, a qualquer título, atribuída ao capital ou valor investido.

Quando se fala de finanças, é comum ouvir que alguém vai aplicar certa quantia em dinheiro e esta quantia lhe renderá juros, assim como alguém pode tomar dinheiro emprestado e pagar juros por este empréstimo.

Pois bem, nesta seção entenderemos como funcionam estas operações de aplicação ou empréstimos e suas formas de fazê-las.

Os juros podem ser cobrados de duas maneiras distintas, isso depende do valor de referência para sua capitalização, podendo ser simples, quando é calculado sempre sobre o capital inicial, ou pode ser composto, quando o valor de referência para sua capitalização é o montante referente ao período anterior.

DEDINIÇÕES BÁSICAS

No que tange aos regimes de capitalização que serão abordados, definiremos alguns termos que serão frequentemente utilizados, estes termos são os citados a seguir:

- CAPITAL ($C$): o capital inicial, o valor principal;
- JURO ($J$): a remuneração sobre o capital;
- TEMPO ($t$): o tempo da aplicação;
- TAXA ($i$): a taxa unitária da aplicação;
- MONTANTE ($M$): o capital acrescido dos juros.

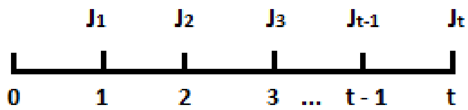
## 2.1 Regime de Capitalização Simples

**Definição**: Juro simples é aquele calculado unicamente sobre o capital inicial.

Sendo i a taxa de juros, o regime de capitalização simples é caracterizado pelo fato de que o valor que é tido como remuneração do valor do capital inicial a cada período é sempre o mesmo e é calculado pela expressão $Ci$, ou seja, a taxa de juros $i$ incide unicamente sobre o capital inicial, independentemente do tempo que dure da operação. Desta forma, a cada período, o montante acumulado será adicionado a um valor constante, os juros, será dado pela expressão $J = Ci$.

Os juros formados no final de cada período são constantes e, portanto, o cálculo do montante será conforme o esquema a seguir:

Figura 2.1: Cálculo dos Juros Simples




Fonte: Elaborada pelo Autor

$J_1 = J_2 = J_3 = J_4 = ... = Jt = Ci$

Ao final de $t$ períodos, o juro total acumulado será:

$J = J_1 + J_2 + J_3 + J_4 + ... + Jt$

$J = Ci + Ci + Ci + Ci + ... + Ci$

$J = C(i + i + i + i + ... + i)$

$J = Cit$

OBS: O prazo de aplicação $(t)$ deve ser expresso na mesma unidade de tempo da taxa $(i)$ considerada.

Ex: Supondo que uma pessoa aplique em longo prazo a quantia de R$ 15.000,00 a uma taxa de 8% ao ano no regime de capitalização simples. Encontre a expressão que calcula os juros obtidos em função do tempo de aplicação e expresse-a graficamente.

SOLUÇÃO:

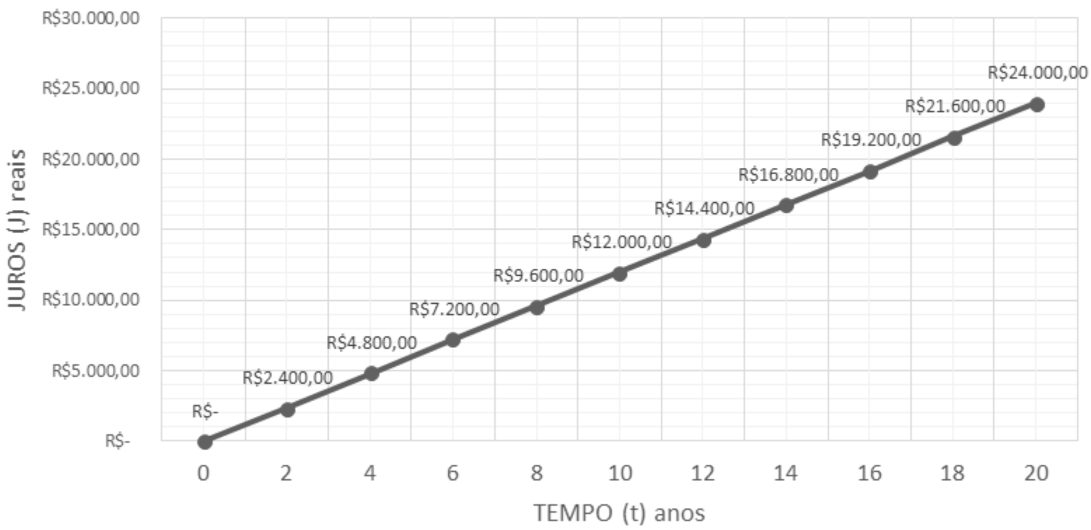
No caso citado, a pessoa aplica R$ 15.000,00, a uma taxa de 8% a.a., logo:

$C = 15000$

$i = 8\% a.a. = 0,08 a.a.$

$J = Cit \Rightarrow J = 15000 \cdot 0,08 \cdot t \Rightarrow J = 1200 \cdot t$

Figura 2.2: Juros Simples X Tempo




Fonte: Elaborada pelo Autor

Note que a situação representa uma função afim cuja variável é o tempo, pois, tomando $f(t) = Cit$, tem-se que $f(t+h) - f(t) = Ci(t+h) - Cit = Cih$, ou seja, não depende do tempo, o que caracteriza exatamente uma função afim. Perceba também que ao final de 20 anos o valor dos juros acumulados serão no valor de R$ 24.000,00.

CÁLCULO DO MONTANTE

Já sabemos que o montante é o capital inicial aplicado acrescido dos juros relativos ao período da aplicação, ou seja:

MONTANTE = CAPITAL + JUROS

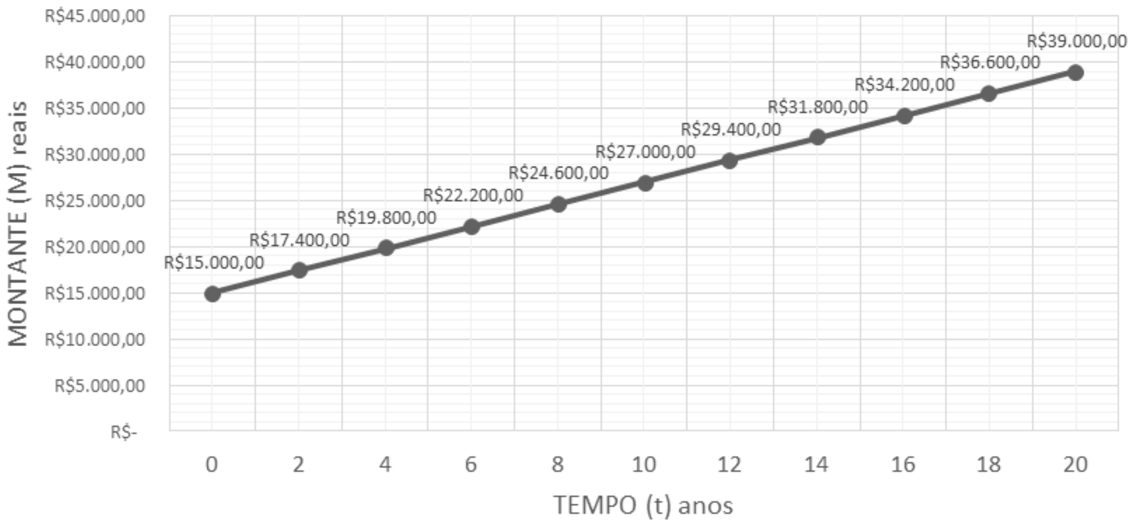
$M = C + J$

$M = C + Cit$

$M = C \cdot (1 + it)$

Considerando a situação do exemplo anterior, temos que o montante será dado conforme o gráfico a seguir:

Figura 2.3: Montante(Juros Simples) X Tempo




Fonte: Elaborada pelo Autor

Note que a situação representa uma função afim cuja variável é o tempo, pois, tomando $f(t) = C + Cit$, tem-se que $f(t + h) - f(t) = C + Ci(t + h) - C - Cit = Cih$, ou seja, não depende do tempo, o que caracteriza exatamente uma função afim. Perceba também que ao final de 20 anos o montante acumulado é no valor de R$ 39.000,00.

### 2.1.1 Taxas Proporcionais

Nas operações financeiras que envolvem o rendimento de juros, conforme citado anteriormente, a taxa e o tempo devem estar na mesma unidade de tempo, caso não estejam, sugere-se que convertamos o tempo para a mesma unidade da taxa, mas em se tratando de juros simples, caso queiramos converter a taxa, utilizaremos a taxa proporcional.

**Definição**: Duas taxas são denominadas proporcionais, quando seus valores formam uma proporção com os seus respectivos períodos de tempo, reduzidos numa mesma unidade.

Assim, sendo duas taxas $i_1$ e $i_2$, referentes respectivamente aos tempos $t_1$ e $t_2$, na mesma unidade de tempo da taxa, obtemos o resultado a seguir:

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{t_1}{t_2}$$

Obs: Ambas as taxas devem estar na forma percentual ou ambas na forma unitária.

Ex: As taxas 24% ao ano e 2% ao mês são proporcionais:

$$\frac{24\%}{2\%} = \frac{12}{1} \text{ ou } \frac{0,24}{0,02} = \frac{12}{1}$$

Ex: Determine os juros e o montante de uma aplicação de R$ 6.000,00 durante dois anos, à taxa de juros simples de 0,5% ao mês.

SOLUÇÃO:

Na operação citada no exemplo, temos que:

$C = R\$6.000,00$

$t = 2$ anos

$i = 0,5\%$ ao mês

Como a taxa e o tempo estão em unidades diferentes, temos que passar para a mesma unidade, neste caso, vamos converter a taxa de "ao mês"para "ao ano".

Chamando $i_m$ a taxa ao mês e $i_a$ a taxa ao ano, e como 1 ano tem 12 meses, temos:

$\dfrac{i_a}{0,5\%} = \dfrac{12}{1} \Rightarrow i_a = 6\%$ ao ano $=$ 0,06 ao ano.

$J = Cit \Rightarrow J = 6000 \cdot 2 \cdot 0,06 \Rightarrow J = R\$720,00$

Como $M = C + J \Rightarrow M = 6000 + 720 \Rightarrow M = R\$6.720,00$

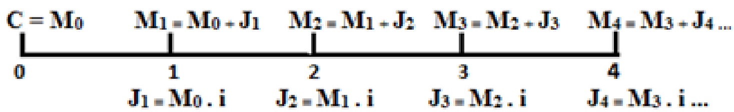
## 2.2 Regime de Capitalização Composta

**Definição**: Juros compostos são aqueles que em cada período financeiro, a partir do segundo, é calculado sobre o montante relativo ao período anterior. Neste período, os juros são capitalizados, produzindo assim, periodicamente, juros sobre juros.

Sendo $i$ a taxa de juros, o regime de capitalização composto é caracterizado pelo fato de que o valor que é tido como remuneração do valor do capital obtido ao final de cada período é incorporado ao montante do respectivo período, este montante servirá de base para o cálculo do juro referente ao período seguinte. Assim sendo, o regime de capitalização composto é diferente do regime de capitalização simples, onde o cálculo do juro incidia exclusivamente sobre o capital inicial, não ocorrendo assim a capitalização sobre os juros formados nos períodos anteriores.

Os juros formados no final de cada período seguem o seguinte esquema:

Figura 2.4: Juros Compostos




Fonte: Elaborada pelo Autor

Portando, o cálculo do montante em um certo período levando em conta o período inicial da operação, resulta nas seguintes operações:

$C = M_0 \Rightarrow J_1 = Ci \Rightarrow J_1 = M_0 i$

$M_1 = M_0 + J_1 \Rightarrow M_1 = M_0 + M_0 i \Rightarrow M_1 = M_0(1+i)^1 \Rightarrow J2 = M_1 i$

$M_2 = M_1 + J_2 \Rightarrow M_2 = M_1 + M_1 i \Rightarrow M_2 = M_1(1+i)^1 \Rightarrow M_2 = M_0(1+i)^2 \Rightarrow J_3 = M_2 i$

$M_3 = M_2 + J_3 \Rightarrow M_3 = M_2 + M_2 i \Rightarrow M_3 = M_2(1+i)^1 \Rightarrow M_3 = M_0(1+i)^3 \Rightarrow J_4 = M_3 i$

$M_4 = M_3 + J_4 \Rightarrow M_4 = M_3 + M_3 i \Rightarrow M_4 = M_3(1+i)^1 \Rightarrow M_4 = M_0(1+i)^4 \Rightarrow J_5 = M_4 i$

$\vdots$

Logo, após $t$ períodos, teremos:

$M = M_0(1+i)^t$ e como $M_0 = C$, conclui-se que $M = C(1+i)^t$.

OBS: O prazo de aplicação $(t)$ deve ser expresso na mesma unidade de tempo da taxa $(i)$ considerada.

Ex: Supondo que uma pessoa aplique em longo prazo a quantia de R$ 15.000,00 a uma taxa de 8% ao ano no regime de capitalização composto. Encontre a expressão que calcula o montante obtido em função do tempo de aplicação e expresse-a graficamente.

SOLUÇÃO:

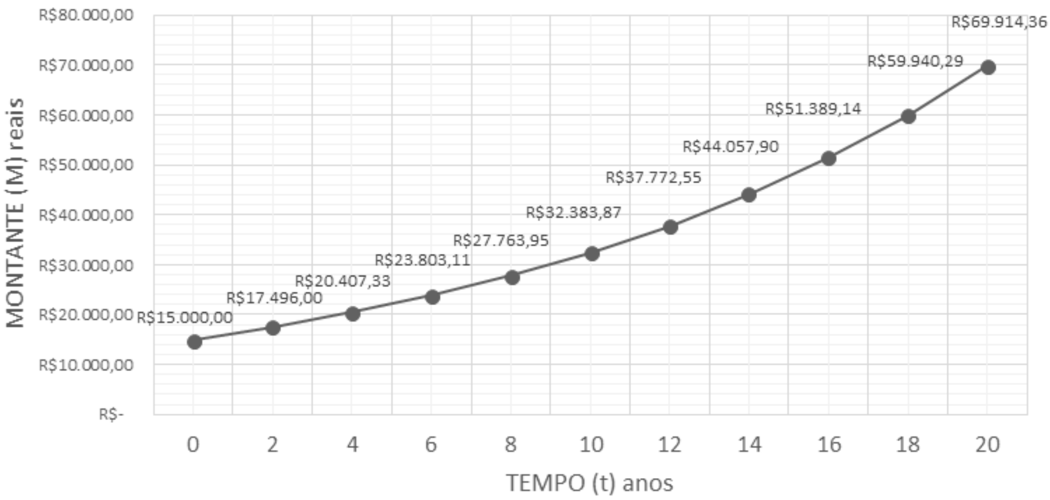
No caso citado, a pessoa aplica R$ 15.000,00, a uma taxa de 8% a.a., logo:

$C = 15000$

$i = 8\%$ a.a. $= 0,08$ a.a.

$M = C(1+i)^t \Rightarrow M = 15000 \cdot (1+0,08)^t \Rightarrow M = 15000 \cdot (1,08)^t$

Figura 2.5: Montante(Juros Compostos) X Tempo




Fonte: Elaborada pelo Autor

Note que a situação representa uma função exponencial cuja variável é o tempo, pois, tomando $f(t) = C \cdot (1+i)^t$, tem-se que $\dfrac{f(t+h) - f(t)}{f(t)} = \dfrac{C \cdot (1+i)^{(t+h)} - C \cdot (1+i)^t}{C \cdot (1+i)^t} = (1+i)^h - 1$, ou seja, não depende do tempo, o que caracteriza exatamente uma função exponencial. Perceba também que ao final de 20 anos o montante acumulado é no valor de R$ 69.914,36.

CÁLCULO DO JURO

Já sabemos que o montante é o capital inicial aplicado acrescido dos juros relativos ao período da aplicação, ou seja:

MONTANTE = CAPITAL + JUROS

$M = C + J$

$J = M - C$

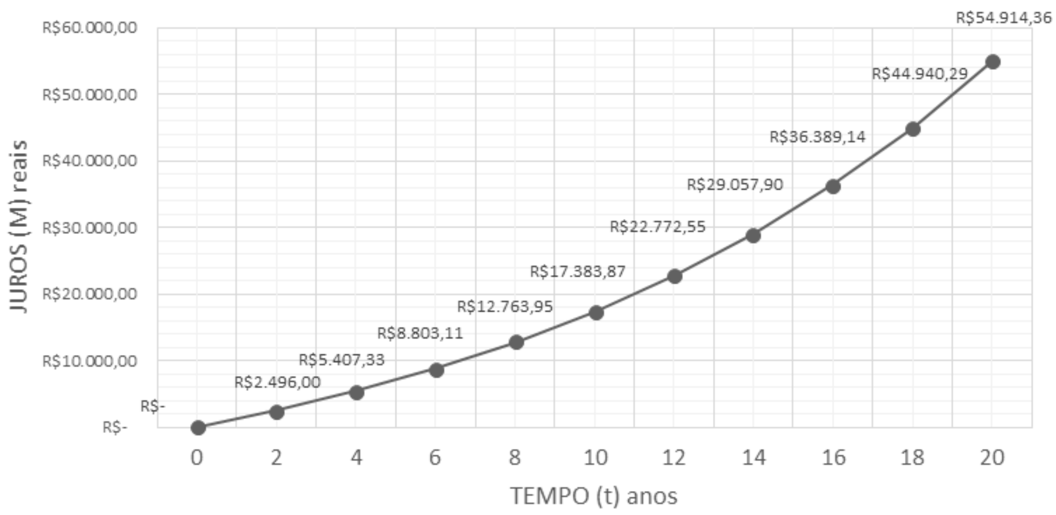
$J = C(1+i)^t - C$

$J = C[(1+i)^t - 1]$

Ex: Considerando a situação do exemplo anterior, temos que o juro será dado conforme o gráfico a seguir:

$J = C[(1+i)^t - 1] \Rightarrow J = 15000 \cdot [(1,08)t - 1]$

Figura 2.6: Juros Compostos X Tempo




Fonte: Elaborada pelo Autor

### 2.2.1 Taxas Equivalentes

Como já vimos, nas operações financeiras que envolvem o rendimento de juros, a taxa e o tempo devem estar na mesma unidade de tempo, caso não estejam, sugere-se que convertamos o tempo para a mesma unidade da taxa, mas em se tratando de juros compostos, caso queiramos converter a taxa, utilizaremos a taxa equivalente.

**Definição**: Duas taxas são denominadas equivalentes quando aplicadas a um mesmo capital, em um mesmo período de tempo, produzem montantes com valores iguais.

Assim, sendo duas taxas $i_a$(taxa ao ano) e $i_m$(taxa ao mês), são equivalentes se aplicadas a um capital $C$ durante 1 ano por exemplo, produzirem o mesmo montante. Temos então:

$M_1 = C(1+i_a)^1 \rightarrow$ Montante da operação ao final de 1(um) ano.

$M_{12} = C(1+i_m)^{12} \rightarrow$ Montante da operação ao final de 12(doze) meses.

Como ao final da operação teremos montantes com valores iguais, temos que $M_1 = M_{12}$, logo:

$C(1+i_a)^1 = C(1+i_m)^{12} \Rightarrow (1+i_a)^1 = (1+i_m)^{12}$.

Considerando outras frações de tempo, teremos:

$(1+i_a)^1 = (1+i_s)^2 = (1+i_t)^4 = (1+i_b)^6 = (1+i_m)^{12}$.

Onde:

$i_a \rightarrow$ taxa anual de juros compostos;

$i_s \rightarrow$ taxa semestral de juros compostos;

$i_t \rightarrow$ taxa trimestral de juros compostos;

$i_b \rightarrow$ taxa bimestral de juros compostos;

$i_m \rightarrow$ taxa mensal de juros compostos;

$Obs_1$: Ambas as taxas devem estar na forma unitária.

$Obs_2$: Como no regime de juros simples a conversão da taxa deve ser feita através da taxa proporcional, temos que neste regime a taxa proporcional é igual à taxa equivalente. Já no regime de juros compostos, a taxa equivalente é diferente da proporcional.

Ex: As taxas 6% ao ano e 2,956% ao semestre são equivalentes no regime de capitalização composto:

$i_a = 6\%$ ao ano $= 0,06$ ao ano

Tomando que:

$(1+i_a)^1 = (1+i_s)^2 \Rightarrow (1+0,06)^1 = (1+i_s)^2$

$(1 + i_s) = \sqrt{1,06} \Rightarrow i_s = 1,02956 - 1$

$i_s = 0,02956$ ao semestre ou $2,956\%$ ao semestre.

Ex: Determine os juros e o montante de uma aplicação de R$ 6.000,00 durante dois anos, à taxa de juros compostos de 0,5% ao mês.

SOLUÇÃO:

Na operação citada no exemplo, temos que:

$C = R\$6.000,00$

$t = 2$ anos

$i = 0,5\%$ ao mês $= 0,005$ ao mês

Como a taxa e o tempo estão em unidades diferentes, temos que passar para a mesma unidade, neste caso, vamos converter a taxa de "ao mês"para "ao ano".

Chamando $i_m$ a taxa ao mês e $i_a$ a taxa ao ano, e como 1 ano tem 12 meses, temos:

$(1 + i_a)^1 = (1 + i_m)^{12} \Rightarrow (1 + i_a)^1 = (1 + 0,005)^{12} \Rightarrow i_a = 0,0617$ ou $6,17\%$ ao ano

$M = C(1 + i)^t \Rightarrow M = 6000(1,0617)^2 \Rightarrow M = R\$6.763,24$

Como $M = C + J \Rightarrow J = M - C \Rightarrow J = 6.763,24 - 6.000,00$

logo,

$J = R\$763,24$

### 2.2.2 Taxa Nominal e Taxa Efetiva

Toda aplicação financeira envolvendo juros compostos depende da taxa em questão, a **taxa nominal** é a que deve ser obrigatoriamente indicada em todos os contratos de crédito e de aplicações, nela, o período de capitalização não coincide com o período a que ela se refere. Esta taxa é considerada uma taxa "mentirosa"e é geralmente utilizada como taxa anual com a capitalização em outra unidade de tempo.

Se tomarmos, por exemplo, a taxa de juros de 12% ao ano com capitalizações mensais, esta é uma taxa nominal, pois ela está expressa anualmente e sua capitalização é mensal, logo o período a que ela se refere é diferente do seu período de capitalização. Nesta situação, teríamos uma capitalização de 1% ao mês e consequentemente 12% ao final de 1 ano ou 12 meses, obedecendo assim a proporcionalidade entre as taxas e seus respectivos períodos. Porém, conforme já estudamos no regime de capitalização composto, temos os chamados juros sobre juros, daí o fato de ela ser uma taxa "mentirosa", pois ao final dos 12 meses mencionados ela representaria uma taxa superior aos 12% anuais citados.

A **taxa efetiva** de juros, é a taxa de juros efetivamente cobrada durante todo o período em que ela é capitalizada, no exemplo em questão, esta taxa é exatamente a taxa anual equivalente a 1% ao mês, e esta taxa é calculada através do método aplicado na conversão das taxas equivalentes.

No exemplo citado temos que 12% ao ano com capitalizações mensais, corresponde à taxa de 1% ao mês, mas:

$$(1+i_a)^1 = (1+i_m)^{12} \Rightarrow i_a = (1,01)^{12} - 1 \Rightarrow i_a = 0,1268 \text{ ao ano ou } 12,68\% \text{ ao ano.}$$

Note que a taxa efetiva cobrada, 12,68% ao ano, é superior aos 12% anuais mencionados pela taxa nominal.

# 3 Valor presente e Valor Futuro

## 3.1 Cálculo do Valor Futuro

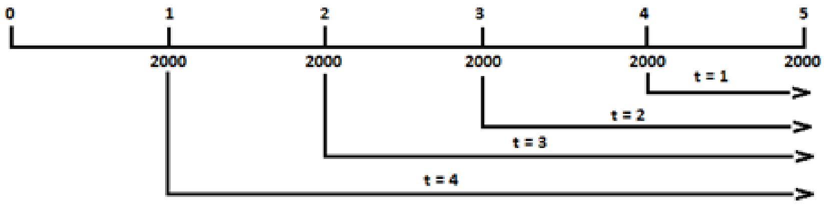
O montante, que também pode ser chamado de valor futuro($VF$), é o capital, também chamado de valor presente($VP$), investido sendo recuperado acrescido de uma remuneração. Assim sendo, segue que:

$$VF = VP(1+i)^t$$

Ex: Se uma pessoa resolver fazer depósitos mensais constantes durante cinco meses, no final de cada período, no valor de R$ 2.000,00, quanto esta pessoa terá no final das aplicações sabendo que o valor investido será remunerado em 1% ao mês?

SOLUÇÃO:

Figura 3.1: Valor Futuro




Fonte: Elaborada pelo Autor

Note que o problema se resume a um simples caso de juros compostos, capitalizando-se assim cada prestação durante o tempo que lhe cabe.

$VF = 2000(1+i)^4 + 2000(1+i)^3 + 2000(1+i^{)}2 + 2000(1+i)^1 + 2000$

$VF = 2000[(1+i)^4 + (1+i)^3 + (1+i)^2 + (1+i)^1 + 1]$

Substituindo $i = 0,01$, temos:

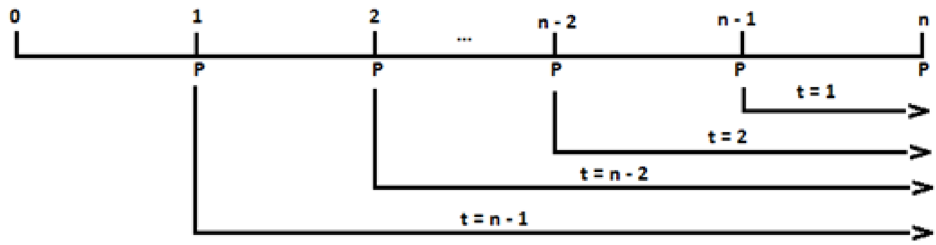
$VF = 2000(5,101)$

$VF = R\$10.202,00$

Logo, ao final das cinco aplicações a pessoa irá possuir a quantia de $R\$10.202,00$.

Seguindo a lógica do exemplo anterior, caso a pessoa faça "$n$" depósitos ao final de cada período, cada um de valor "$P$", teremos a seguinte situação:

Figura 3.2: Cálculo do Valor Futuro




Fonte: Elaborada pelo Autor

$VF = P[(1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-3} + ... + (1+i)^2 + (1+i)^1 + 1]$

Note que a expressão entre colchetes representa a soma dos termos da Progressão Geométrica $\{1,(1+i)^1,(1+i)^2,...,(1+i)^{n-3},(1+i)^{n-2},(1+i)^{n-1}\}$ de "$n$" termos, tida por:

$$S = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Onde:

$S$ é a soma dos termos da PG;

$a_1$ é o primeiro terno;

$q$ é a razão da PG;

$n$ é número de termos da PG.

Temos então que:

$a_1 = 1$

$q = (1 + i)$

$n = n$

$S = \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1} \Rightarrow S = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$

Logo:

$$VF = P\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Logo, no exemplo anterior, poderíamos aplicar diretamente a fórmula do Valor Futuro(VF), para isso, basta toma os seguintes valores:

$P = 2000$

$i = 1\% = 0,01$

$n = 5$

Assim sendo:

$VF = 2000\frac{(1+0,01)^5 - 1}{0,01} \Rightarrow VF = R\$10.202,00$

## 3.2 Cálculo do Valor Presente

Em algumas situações precisamos calcular o valor de uma dívida referente a um empréstimo ou o valor a vista de um bem financiado com prestações periódicas de valores constantes, neste caso o valor futuro já não nos interessaria, e sim o valor presente, porém, conforme visto anteriormente, $VF = VP(1+i)^t$, e $t$ representa o número de prestações, logo $t = n$, daí:

$$VF = P\frac{(1+i)^n - 1}{i} \Rightarrow VP(1+i)^n = P\frac{(1+i)^n - 1}{i} \Rightarrow VP = P\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}$$

Obs: A fórmula acima desenvolvida é utilizada para pagamentos sem o valor de entrada e periodicamente ao final de cada período, no caso da operação exigir um valor como entrada, este valor entra como sendo "a vista"e deverá ser descontado do valor do bem ou empréstimo, desta maneira, os juros incidirão apenas sobre o saldo restante.

Ex: Para pagar um automóvel, uma pessoa pagou 36 parcelas de R$ 745,00 sem entrada, sabendo que a taxa do financiamento foi de 2% ao mês, qual o preço a vista deste automóvel?

SOLUÇÃO:

Basta substituir os seguintes valores:

$P = 745$

$i = 2\% = 0,02$

$n = 36$

$$VP = P\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} \Rightarrow VP = 745\frac{(1+0,02)^{36} - 1}{0,02(1+0,02)^{36}} \Rightarrow VP = 745(25,489)$$

$VP = R\$18.989,18$

Ex: Um empréstimo de R$ 22.782,53 deverá ser pago em 24 parcelas mensais e constantes ao final de cada mês, sabendo que a taxa de juros cobrada foi de 2,2% ao mês, qual será o valor da prestação devida?

SOLUÇÃO:

Basta substituir os seguintes valores:

$VP = 22782,53$

$i = 2,2\% = 0,022$

$n = 24$

$$VP = P\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} \Rightarrow 22782,53 = P\frac{(1+0,022)^24 - 1}{0,022(1+0,022)^{24}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P = \frac{22782,53}{18,4923} \Rightarrow P = R\$1.232,00$$

# 4 Sistemas de Amortização

**Definição**: Amortizar, nada mais é do que reduzir uma dívida por meio de pagamento parcial ou gradual acertado entre as partes.

Quando alguém resolve adquirir um bem com valores que fogem de seu orçamento, esta pessoa, geralmente, recorre aos tão temidos empréstimos ou financiamentos em longo prazo. Estas operações geram ao seu contratante a obrigação de pagamentos periódicos que englobam os juros devidos e/ou um valor a ser amortizado da dívida.

Na liquidação destas operações, o devedor pode levar em conta algumas opções, ele pode determinar uma data de vencimento, e nesta data, pagar os juros e amortizar toda a dívida de uma só vez, ele pode periodicamente pagar apenas os juros e estabelecer uma data de vencimento para que amortize a dívida toda de uma vez ou ele pode pagar periodicamente os juros e um certo valor para amortizar parte da dívida.

Nos sistemas de amortização que serão citados, em regra, os juros são cobrados sempre sobre o saldo devedor, desta forma, o não pagamento de uma prestação significa o aumento do saldo devedor, pois os juros serão incorporados a este saldo e, assim, serão cobrados os tão temidos juros sobre juros.

No Brasil, as modalidades mais frequentemente utilizadas são o Sistema Price e o Sistema de Amortização Constante(SAC). Além destes sistemas, vamos mostrar um exemplo de sistema de financiamento sem juros, porém com correção periódica do saldo devedor baseada em índices previstos em contrato.

## 4.1 Sistema Price

Pelo Sistema Price(PRICE), o devedor assume o compromisso de pagar o empréstimo em prestações periódicas e constantes. Como as prestações são constantes, com o passar do tempo, o valor da amortização da dívida aumenta à medida que o valor do juro diminui. Vale ressaltar, que neste sistema, a taxa nominal é dada em termos anuais.

Neste sistema, para calcularmos o valor da prestação, recorremos ao já citado calculo do valor presente. Para entendermos melhor o seu funcionamento, seguiremos o seguinte esquema:

Figura 4.1: Valor Presente(Tabela PRICE)


Fonte: Elaborada pelo Autor

Onde, $VP$ corresponde ao valor a vista do bem, "$n$" é o número total de períodos e "$P$" são as prestações. Neste caso:

$$VP = P\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} \Rightarrow P = VP\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$$

$$J_k = iSD_{k-1} \ / \ A_k = P - J_k \ / \ SD_k = SD_{k-1} - A_k$$

$J_k$ é o juro no período $K$;

$A_k$ é o valor da amortização no período $K$;

$SD_k$ é o saldo devedor no período $K$;

Ex: Uma instituição faz um empréstimo de R$ 100.000,00 para ser pago pelo sistema PRICE em cinco parcelas anuais à taxa de 12% ao ano. Calcule o valor da prestação e monte a tabela de amortização.

$$P = VP\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \Rightarrow P = 100.000\frac{0,12(1+0,12)^5}{(1+0,12)^5 - 1} \Rightarrow P = R\$27.740,97$$

TABELA DE AMORTIZAÇÃO

Como no sistema PRICE as prestações são constantes, para calcularmos os juros referentes a cada período, basta multiplicar a taxa de juros pelo saldo devedor. O valor da prestação diminuído do juro será exatamente o valor a ser amortizado deste saldo devedor. Assim sendo, vamos calcular detalhadamente os juros e o valor a ser amortizado em cada período, bem como o novo saldo devedor.

1º ANO

$J_1 = 0,12 \cdot 100.000 \Rightarrow J_1 = R\$12.000,00$

$A_1 = P - J_1 \Rightarrow A_1 = 27.740,97 - 12.000,00 \Rightarrow A_1 = R\$15.740,97$

$SD_1 = VP - A_1 \Rightarrow SD_1 = 100.000,00 - 15.740,97 \Rightarrow SD_1 = R\$84.259,03$

2º ANO

$J_2 = 0,12 \cdot 84.259,03 \Rightarrow J_2 = R\$10.111,08$

$A_2 = P - J_2 \Rightarrow A_2 = 27.740,97 - 10.111,08 \Rightarrow A_2 = R\$17.629,89$

$SD_2 = SD_1 - A_2 \Rightarrow SD_2 = 84.259,03 - 17.629,89 \Rightarrow SD_2 = R\$66.629,14$

3º ANO

$J_3 = 0,12 \cdot 66.629,14 \Rightarrow J_3 = R\$7.995,49$

$A_3 = P - J_3 \Rightarrow A_3 = 27.740,97 - 7.995,49 \Rightarrow A_3 = R\$19.745,48$

$SD_3 = SD_2 - A_3 \Rightarrow SD_3 = 66.629,14 - 19.745,48 \Rightarrow SD_3 = R\$46.883,66$

4º ANO

$J_4 = 0,12 \cdot 46.883,66 \Rightarrow J_4 = R\$5.626,04$

$A_4 = P - J_4 \Rightarrow A_4 = 27.740,97 - 5.626,04 \Rightarrow A_4 = R\$22.114,93$

$SD_4 = SD_3 - A_4 \Rightarrow SD_4 = 46.883,66 - 22.114,93 \Rightarrow SD_4 = R\$24.768,73$

5º ANO

$J_5 = 0,12 \cdot 24.768,73 \Rightarrow J_5 = R\$2.972,25$

$A_5 = P - J_5 \Rightarrow A_5 = 27.740,97 - 2.972,25 \Rightarrow A_5 = R\$24.768,73$

$SD_5 = SD_4 - A_5 \Rightarrow SD_5 = 24.768,73 - 24.768,73 \Rightarrow SD_5 = R\$0,00$

Figura 4.2: Tabela PRICE

| PERÍODO | PRESTÇÃO | JURO | AMORTIZAÇÃO | SALDO DEVEDOR |
|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | |
| 1 | R$ 27.740,97 | R$ 12.000,00 | R$ 15.740,97 | R$ 84.259,03 |
| 2 | R$ 27.740,97 | R$ 10.111,08 | R$ 17.629,89 | R$ 66.629,14 |
| 3 | R$ 27.740,97 | R$ 7.995,50 | R$ 19.745,48 | R$ 46.883,66 |
| 4 | R$ 27.740,97 | R$ 5.626,04 | R$ 22.114,93 | R$ 24.768,73 |
| 5 | R$ 27.740,97 | R$ 2.972,25 | R$ 24.768,73 | 0,00 |
| TOTAL | R$ 138.704,87 | R$ 38.704,87 | R$ 100.000,00 | |

Fonte: Elaborada pelo Autor

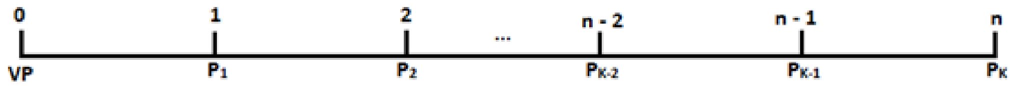
## 4.2 Sistema de Amortização Constante(SAC)

Assim como no Sistema Price, o devedor liquida a dívida com o pagamento de prestações periódicas, mas não constantes. Cada uma das prestação englobam valores referentes a juros e a amortizações. Sua principal característica é o fato de as amortizações periódicas serem constantes, entretanto, em relação ao Sistema Price, o valor das prestações no início é maior e vai decrescendo com o passar do tempo, pois o juro é calculado sobre o saldo devedor, que pelo fato de ser amortizado em cada período, torna-se menor.

Como a amortização é constante e o juro é cobrado sobre o saldo devedor temos que à medida que este saldo vai diminuindo, o juro também diminui, e a prestação, que é formada pelo valor da amortização acrescido do juro, decresce com o passar do tempo.

Neste sistema, para encontrarmos o valor das prestações, calculamos separadamente o valor do juro e o valor da dívida a ser amortizado. Para entendermos melhor o seu funcionamento, seguiremos o seguinte esquema:

Figura 4.3: Valor Presente(Tabela SAC)




Fonte: Elaborada pelo Autor

Onde, VP corresponde ao valor a vista do bem ou empréstimo, "n"é o número total de períodos e $P_K$ é a prestação no período K. Neste caso, o fato de a amortização ser constante nos leva a concluir que:

$$A = \frac{VP}{n} \ / \ J_k = i \cdot SD_{k-1} \ / \ P_k = A + J_k \ / \ SD_k = SD_{k-1} - A$$

A é o valor da amortização constante;

$J_k$ é o juro no período $K$;

$SD_k$ é o saldo devedor no período $K$;

Ex: Uma instituição faz um empréstimo de R$ 100.000,00 para ser pago pelo sistema SAC em cinco parcelas anuais à taxa de 12% ao ano. Calcule o valor da prestação e monte a tabela de amortização.

Como no sistema SAC as amortizações são constantes, o primeiro passo é encontrar o valor da amortização, e posteriormente, para calcularmos os juros referentes a cada período, basta multiplicar a taxa de juros pelo saldo devedor. O valor da prestação será o valor da amortização acrescido do juro.

Assim sendo, vamos calcular detalhadamente o valor a ser amortizado, o juro e a prestação em cada período, bem como o novo saldo devedor.

$$A = \frac{VP}{n} \Rightarrow A = \frac{100.000}{5} \Rightarrow A = R\$20.000,00$$

1º ANO

$J_1 = 0,12 \cdot 100.000 \Rightarrow J_1 = R\$12.000,00$

$P_1 = A + J_1 \Rightarrow P_1 = 20.000,00 + 12.000,00 \Rightarrow P_1 = R\$32.000,00$

$SD_1 = VP - A \Rightarrow SD_1 = 100.000,00 - 20.000,00 \Rightarrow SD_1 = R\$80.000,00$

2º ANO

$J_2 = 0,12 \cdot 80.000 \Rightarrow J_1 = R\$9.600,00$

$P_2 = A + J_2 \Rightarrow P_2 = 20.000,00 + 9.600,00 \Rightarrow P_2 = R\$29.600,00$

$SD_2 = SD_1 - A \Rightarrow SD_2 = 80.000,00 - 20.000,00 \Rightarrow SD_2 = R\$60.000,00$

3º ANO

$J_3 = 0,12 \cdot 60.000 \Rightarrow J_3 = R\$7.200,00$

$P_3 = A + J_3 \Rightarrow P_3 = 20.000,00 + 7.200,00 \Rightarrow P_3 = R\$27.200,00$

$SD_3 = SD_2 - A \Rightarrow SD_3 = 60.000,00 - 20.000,00 \Rightarrow SD_3 = R\$40.000,00$

4º ANO

$J_4 = 0,12 \cdot 40.000 \Rightarrow J_4 = R\$4.800,00$

$P_4 = A + J_4 \Rightarrow P_4 = 20.000,00 + 4.800,00 \Rightarrow P_4 = R\$24.800,00$

$SD_4 = SD_3 - A \Rightarrow SD_4 = 40.000,00 - 20.000,00 \Rightarrow SD_4 = R\$20.000,00$

5º ANO

$J_5 = 0,12 \cdot 20.000 \Rightarrow J_5 = R\$2.400,00$

$P_5 = A + J_5 \Rightarrow P_5 = 20.000,00 + 2.400,00 \Rightarrow P_5 = R\$22.400,00$

$SD_5 = SD_4 - A \Rightarrow SD_5 = 20.000,00 - 20.000,00 \Rightarrow SD_5 = R\$0,00$

Figura 4.4: Tabela SAC

| PERÍODO | PRESTÇÃO | JURO | AMORTIZAÇÃO | SALDO DEVEDOR |
|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | R$ 100.000,00 |
| 1 | R$ 32.000,00 | R$ 12.000,00 | R$ 20.000,00 | R$ 80.000,00 |
| 2 | R$ 29.600,00 | R$ 9.600,00 | R$ 20.000,00 | R$ 60.000,00 |
| 3 | R$ 27.200,00 | R$ 7.200,00 | R$ 20.000,00 | R$ 40.000,00 |
| 4 | R$ 24.800,00 | R$ 4.800,00 | R$ 20.000,00 | R$ 20.000,00 |
| 5 | R$ 22.400,00 | R$ 2.400,00 | R$ 20.000,00 | R$ 0,00 |
| TOTAL | R$ 136.000,00 | R$ 36.000,00 | R$ 100.000,00 | |

Fonte: Elaborada pelo Autor

# 5 Sistemas de Financiamentos no Cotidiano

Nesta seção, chegaremos ao ponto chave do presente trabalho, aqui serão apresentadas algumas situações reais de contratos de financiamentos seguindo os conceitos do Sistema Price, do Sistema de Amortização Constante e também uma situação de financiamento sem juros, porem com correção anual do saldo devedor conforme índice previsto em contrato, nas situações apresentadas a seguir desconsideraremos o cálculo do IOF, pois o mesmo é controlado pelo governo que em alguns momentos altera a forma de calculá-lo a fim de controlar o mercado.

$EX_1$ : O primeiro exemplo refere-se ao financiamento de um automóvel que custou R$ 41.990,00 feito em 23/11/2012 pelo Banco do Brasil. O financiamento foi feito com uma entrada de R$ 4.199,00 e o saldo devedor dividido em 48 parcelas constantes a uma taxa de juros de 1,28% ao mês pelo Sistema Price conforme contrato exposto.

Figura 5.1: Contrato Exemplo 1

**3 - Instituição credora**

| Nome | CNPJ |
|---|---|
| **Banco do Brasil S.A.** | 00.000.000/0001-91 |

Endereço
SBS - Quadra 01 - Bloco A Ed. Sede I - 7º andar - Brasília (DF) - CEP 70.073-900

**4 - Dados da operação**

| | | |
|---|---|---|
| 4.1 - Tipo da operação: **PREFIXADA** | | 4.2 - Valor bem financiado: R$ 41.990,00 |
| 4.3 - Valor da entrada: R$ 4.199,00 | 4.4 - Valor total do crédito: R$ 38.434,94 | 4.5 - Valor líquido do crédito: R$ 37.791,00 |
| 4.6 - Tx. juros efetiva anual: 16,49 % a.a. | 4.7 - tx. juros efetiva mensal: 1,28 % a.m. | 4.8 - Valor da parcela: R$ 1.082,19 |
| 4.9 - Dia do vencimento: 5 | 4.10 - Vencimento 1ª parcela: 05.01.2013 | 4.11 - Vcto. última parcela / Operação: 05.12.2016 |
| 4.12 - Prazo: 48 meses | 4.13 - Juros de carência: R$ 0,00 | 4.14 - Carência: dias |
| 4.15 - Periodicidade: MENSAL | 4.16 - Tributos (IOF): R$ 643,94 | 4.17 - Seguros: R$ 0,00 |
| 4.18 - Tarifas: R$ 0,00 | 4.19 - Registro cartorário: R$ 0,00 | 4.20 - Valor total a pagar sem financiamento: R$ 0,00 |
| 4.21 - Valor total a pagar com financiamento: R$ 51.945,12 | | 4.22 - CET anual: 17,55 % a.a. |

**16.2.1** - Se o início do pagamento das prestações ocorrer posteriormente a 30 (trinta) dias da data da liberação do valor do financiamento, o valor das parcelas, item 4.9 do Preâmbulo será calculado da seguinte maneira: a) no período compreendido entre a data da liberação do valor do financiamento e o primeiro vencimento das prestações, incidirão juros proporcionais sobre a soma dos itens 4.4 Valor Solicitado, 4.16, Tributos - IOF (inclusive de carência), 4.17 Seguros, 4.18 Tarifas e 4.19 Registro Cartorário; b) o Valor da parcela (item 4.9), será calculado pelo Sistema Price, considerando o Total do Financiamento (item 4.20 ou 4.21), obtido após a incorporação dos Juros de Carência (item 4.13), na forma da alínea "a" anterior.

Local e data
TERESINA , 23 de Novembro de 2012

Fonte: Elaborada pelo Autor

Descontado o valor da entrada, restou R$ 37.791,00 para ser financiado, note que no valor a ser financiado foi incluído o valor do IOF de R$ 643,94, valor este que não iremos detalhá-lo, pois o foco principal desta situação são os juros e as amortizações. Então o valor financiado foi de R$ 38.434,94.

No contrato, as cláusulas 16.2 e 16.2.1 preveem que se a primeira parcela for paga em um período superior a 30 dias da data de assinatura do contrato, serão incorporados ao saldo devedor juros de carência proporcionais a estes dias excedentes. Temos que o contrato foi assinado em 23/11/2012 e a primeira parcela vence em 05/01/2013, portanto, 42 dias após a assinatura do contrato, logo calculamos os juros proporcionais a 12 dias em relação ao valor solicitado de R$ 38.434,94.

$i = 1,28\%$ ao mês, que proporcionalmente, corresponde a aproximadamente $0,0426\%$ ao dia.

$$\frac{i_m}{i_d} = \frac{30}{1} \Rightarrow \frac{1,28\%}{i_d} = \frac{30}{1} \Rightarrow i_d = 0,0426\%$$

$i = 0,000426$ ao dia

$t = 12$ dias

$C = R\$38.434,94$

Segue que:

$J = Cit \Rightarrow J \cong 38.434,94 \cdot 0,000426 \cdot 12 \Rightarrow J \cong R\$196,15$

Assim, em 05/12/2012 o saldo devedor será de R$ 38.631,09 e a partir deste momento calculamos os devidos valores das parcelas, juros e amortizações seguindo os métodos do Sistema Price.

$VP = R\$38.631,09$

$i = 0,0128$ ao mês

$n = 48$ meses

$P = VP\dfrac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \Rightarrow P = 38.631,41\dfrac{0,0128(1+0,0128)^{48}}{(1+0,0128)^48 - 1} \Rightarrow P \cong R\$1.082,19$

Figura 5.2: Tabela Exemplo 1

| DATA | PRESTAÇÃO | JUROS | AMORTIZAÇÃO | SALDO DEVEDOR |
|---|---|---|---|---|
| 27/11/2012 | --- | --- | --- | **R$ 38.434,94** |
| 05/12/2012 | --- | **R$ 196,15** | --- | R$ 38.631,09 |
| 05/01/2013 | R$ 1.082,19 | R$ 494,48 | R$ 587,72 | R$ 38.043,37 |
| 05/02/2013 | R$ 1.082,19 | R$ 486,96 | R$ 595,24 | R$ 37.448,13 |
| 05/03/2013 | R$ 1.082,19 | R$ 479,34 | R$ 602,86 | R$ 36.845,27 |
| 05/04/2013 | R$ 1.082,19 | R$ 471,62 | R$ 610,58 | R$ 36.234,70 |
| 05/05/2013 | R$ 1.082,19 | R$ 463,80 | R$ 618,39 | R$ 35.616,31 |
| 05/06/2013 | R$ 1.082,19 | R$ 455,89 | R$ 626,31 | R$ 34.990,00 |
| 05/07/2013 | R$ 1.082,19 | R$ 447,87 | R$ 634,32 | R$ 34.355,68 |
| 05/08/2013 | R$ 1.082,19 | R$ 439,75 | R$ 642,44 | R$ 33.713,24 |
| 05/09/2013 | R$ 1.082,19 | R$ 431,53 | R$ 650,67 | R$ 33.062,57 |
| 05/10/2013 | R$ 1.082,19 | R$ 423,20 | R$ 658,99 | R$ 32.403,58 |
| 05/11/2013 | R$ 1.082,19 | R$ 414,77 | R$ 667,43 | R$ 31.736,15 |
| 05/12/2013 | R$ 1.082,19 | R$ 406,22 | R$ 675,97 | R$ 31.060,18 |
| 05/01/2014 | R$ 1.082,19 | R$ 397,57 | R$ 684,62 | R$ 30.375,55 |
| 05/02/2014 | R$ 1.082,19 | R$ 388,81 | R$ 693,39 | R$ 29.682,16 |
| 05/03/2014 | R$ 1.082,19 | R$ 379,93 | R$ 702,26 | R$ 28.979,90 |
| 05/04/2014 | R$ 1.082,19 | R$ 370,94 | R$ 711,25 | R$ 28.268,65 |
| 05/05/2014 | R$ 1.082,19 | R$ 361,84 | R$ 720,36 | R$ 27.548,29 |
| 05/06/2014 | R$ 1.082,19 | R$ 352,62 | R$ 729,58 | R$ 26.818,71 |
| 05/07/2014 | R$ 1.082,19 | R$ 343,28 | R$ 738,92 | R$ 26.079,80 |
| 05/08/2014 | R$ 1.082,19 | R$ 333,82 | R$ 748,37 | R$ 25.331,43 |
| 05/09/2014 | R$ 1.082,19 | R$ 324,24 | R$ 757,95 | R$ 24.573,47 |
| 05/10/2014 | R$ 1.082,19 | R$ 314,54 | R$ 767,65 | R$ 23.805,82 |
| 05/11/2014 | R$ 1.082,19 | R$ 304,71 | R$ 777,48 | R$ 23.028,34 |
| 05/12/2014 | R$ 1.082,19 | R$ 294,76 | R$ 787,43 | R$ 22.240,91 |
| 05/01/2015 | R$ 1.082,19 | R$ 284,68 | R$ 797,51 | R$ 21.443,39 |
| 05/02/2015 | R$ 1.082,19 | R$ 274,48 | R$ 807,72 | R$ 20.635,67 |
| 05/03/2015 | R$ 1.082,19 | R$ 264,14 | R$ 818,06 | R$ 19.817,62 |
| 05/04/2015 | R$ 1.082,19 | R$ 253,67 | R$ 828,53 | R$ 18.989,09 |
| 05/05/2015 | R$ 1.082,19 | R$ 243,06 | R$ 839,13 | R$ 18.149,95 |
| 05/06/2015 | R$ 1.082,19 | R$ 232,32 | R$ 849,88 | R$ 17.300,08 |
| 05/07/2015 | R$ 1.082,19 | R$ 221,44 | R$ 860,75 | R$ 16.439,32 |
| 05/08/2015 | R$ 1.082,19 | R$ 210,42 | R$ 871,77 | R$ 15.567,55 |
| 05/09/2015 | R$ 1.082,19 | R$ 199,26 | R$ 882,93 | R$ 14.684,62 |
| 05/10/2015 | R$ 1.082,19 | R$ 187,96 | R$ 894,23 | R$ 13.790,39 |
| 05/11/2015 | R$ 1.082,19 | R$ 176,52 | R$ 905,68 | R$ 12.884,71 |
| 05/12/2015 | R$ 1.082,19 | R$ 164,92 | R$ 917,27 | R$ 11.967,44 |
| 05/01/2016 | R$ 1.082,19 | R$ 153,18 | R$ 929,01 | R$ 11.038,43 |
| 05/02/2016 | R$ 1.082,19 | R$ 141,29 | R$ 940,90 | R$ 10.097,53 |
| 05/03/2016 | R$ 1.082,19 | R$ 129,25 | R$ 952,95 | R$ 9.144,58 |
| 05/04/2016 | R$ 1.082,19 | R$ 117,05 | R$ 965,14 | R$ 8.179,43 |
| 05/05/2016 | R$ 1.082,19 | R$ 104,70 | R$ 977,50 | R$ 7.201,94 |
| 05/06/2016 | R$ 1.082,19 | R$ 92,18 | R$ 990,01 | R$ 6.211,93 |
| 05/07/2016 | R$ 1.082,19 | R$ 79,51 | R$ 1.002,68 | R$ 5.209,24 |
| 05/08/2016 | R$ 1.082,19 | R$ 66,68 | R$ 1.015,52 | R$ 4.193,73 |
| 05/09/2016 | R$ 1.082,19 | R$ 53,68 | R$ 1.028,52 | R$ 3.165,21 |
| 05/10/2016 | R$ 1.082,19 | R$ 40,51 | R$ 1.041,68 | R$ 2.123,53 |
| 05/11/2016 | R$ 1.082,19 | R$ 27,18 | R$ 1.055,01 | R$ 1.068,52 |
| 05/12/2016 | R$ 1.082,19 | R$ 13,68 | R$ 1.068,52 | R$ 0,00 |
| **TOTAL** | **R$ 51.945,36** | **R$ 13.314,27** | **R$ 38.631,09** | |

Outro item que merece destaque são os campos 4.6 e 4.7 que se referem a taxa mensal e a taxa anual, neste caso, podemos observar claramente a equivalência entre as taxas.

$(1 + i_a)^1 = (1 + i_m)^{12} \Rightarrow (1 + i_a) = (1 + 0,0128)^{12}$

$(1 + i_a) = (1,0128)^{12} \Rightarrow i_a = 1,1649$

$i_a = 0,1649$ ao ano ou $16,49\%$ ao ano

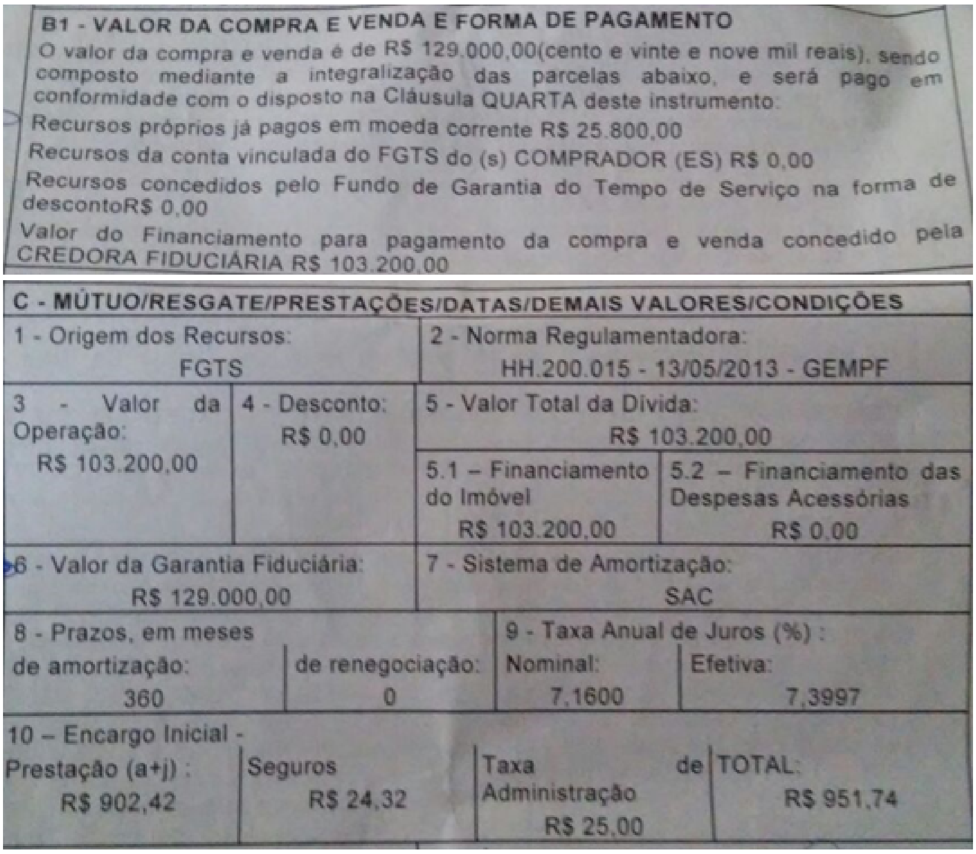
Onde:

$i_a \rightarrow$ taxa anual de juros compostos;

$i_m \rightarrow$ taxa mensal de juros compostos;

$EX_2$ : O segundo exemplo refere-se ao financiamento de um imóvel residencial que custou R$ 129.000,00 pela Caixa Econômica Federal. O financiamento foi feito com uma entrada de R$ 25.800,00 e o saldo devedor dividido em 360 parcelas a uma taxa de juros nominal de 7,16% ao ano pelo Sistema de Amortização Constante (SAC) conforme contrato exposto.

Figura 5.3: Contrato Exemplo 2



**B1 - VALOR DA COMPRA E VENDA E FORMA DE PAGAMENTO**

O valor da compra e venda é de R$ 129.000,00(cento e vinte e nove mil reais), sendo composto mediante a integralização das parcelas abaixo, e será pago em conformidade com o disposto na Cláusula QUARTA deste instrumento:

Recursos próprios já pagos em moeda corrente R$ 25.800,00

Recursos da conta vinculada do FGTS do (s) COMPRADOR (ES) R$ 0,00

Recursos concedidos pelo Fundo de Garantia do Tempo de Serviço na forma de descontoR$ 0,00

Valor do Financiamento para pagamento da compra e venda concedido pela CREDORA FIDUCIÁRIA R$ 103.200,00

**C - MÚTUO/RESGATE/PRESTAÇÕES/DATAS/DEMAIS VALORES/CONDIÇÕES**

1 - Origem dos Recursos: FGTS

2 - Norma Regulamentadora: HH.200.015 - 13/05/2013 - GEMPF

3 - Valor da Operação: R$ 103.200,00

4 - Desconto: R$ 0,00

5 - Valor Total da Dívida: R$ 103.200,00

5.1 – Financiamento do Imóvel: R$ 103.200,00

5.2 – Financiamento das Despesas Acessórias: R$ 0,00

6 - Valor da Garantia Fiduciária: R$ 129.000,00

7 - Sistema de Amortização: SAC

8 - Prazos, em meses

| de amortização: | de renegociação: |
|---|---|
| 360 | 0 |

9 - Taxa Anual de Juros (%):

| Nominal: | Efetiva: |
|---|---|
| 7,1600 | 7,3997 |

10 – Encargo Inicial -

| Prestação (a+j): | Seguros | Taxa de Administração | TOTAL: |
|---|---|---|---|
| R$ 902,42 | R$ 24,32 | R$ 25,00 | R$ 951,74 |

Observe que a taxa é dada no item 9 em termos anuais e no formato nominal de $7,16\%$ ao ano, para encontrarmos a taxa mensal basta calculá-la através da taxa proporcional, ou seja, divide-se por 12.

$$\frac{i_m}{i_a} = \frac{1}{12} \Rightarrow i_m = \frac{i_a}{12} \Rightarrow i_m = \frac{7,16\%}{12} \Rightarrow i_m \cong 0,596666\% \text{ ao mês}$$

A taxa efetiva a que se refere o item 9 é exatamente a taxa anual equivalente a taxa mensal acima calculada.

$(1 + i_a)^1 = (1 + i_a)^{12} \Rightarrow (1 + i_a) = (1 + 0,00596666)^{12}$

$(1 + i_a) = (1,00596666)^{12} \Rightarrow i_a = 1,073997 - 1$

$i_a = 0,073997$ ao ano ou $7,3997\%$ ao ano

Onde:

$i_a \rightarrow$ taxa anual de juros compostos;

$i_m \rightarrow$ taxa mensal de juros compostos;

Para encontrarmos o valor das prestações seguiremos os passos já citados anteriormente.

$VP = R\$103.200,00$

$n = 360$ meses

$i = 0,596666\%$ ao mês

$A = \dfrac{VP}{n} \Rightarrow A = \dfrac{103.200,00}{360} \Rightarrow A = R\$286,66$

$J_1 = VP \cdot i \Rightarrow J_1 = 103.200 \cdot 0,00596666 \Rightarrow J_1 = R\$615,76$

$P_1 = A + J_1 \Rightarrow P_1 = 286,66 + 615,76 \Rightarrow P_1 = R\$902,42$

$SD_1 = VP - A \Rightarrow SD_1 = 103.200,00 - 286,66 \Rightarrow SD_1 = R\$102.913,34$

$J_2 = SD_1 \cdot i \Rightarrow J_2 = 102.913,34 \cdot 0,00596666 \Rightarrow J_2 = R\$614,05$

$P_2 = A + J_2 \Rightarrow P_2 = 286,66 + 614,05 \Rightarrow P_2 = R\$900,71$

$SD_2 = SD_1 - A \Rightarrow SD_2 = 102.913,34 - 286,66 \Rightarrow SD_2 = R\$102.626,68$

Seguem-se estes passos para calcular as prestações restantes.

Obs: O item 10 do contrato prevê prestação inicial de R$ 951,74, pois a estas prestações calculadas, adiciona-se os valores referente ao seguro (R$ 24,32) e à taxa de administração (R$ 25,00).

Figura 5.4: Tabela Exemplo 2

TABELA DE AMORTIZAÇÃO

| DATA | PRESTAÇÃO | JUROS | AMORTIZAÇÃO | SALDO DEVEDOR |
|---|---|---|---|---|
| 18/06/2013 | --- | --- | --- | R$ 103.200,00 |
| 18/07/2013 | R$ 902,42 | R$ 615,76 | R$ 286,66 | R$ 102.913,34 |
| 18/08/2013 | R$ 900,71 | R$ 614,05 | R$ 286,66 | R$ 102.626,68 |
| 18/09/2013 | R$ 899,00 | R$ 612,34 | R$ 286,66 | R$ 102.340,02 |
| 18/10/2013 | R$ 897,29 | R$ 610,63 | R$ 286,66 | R$ 102.053,36 |
| 18/11/2013 | R$ 895,58 | R$ 608,92 | R$ 286,66 | R$ 101.766,70 |
| 18/12/2013 | R$ 893,87 | R$ 607,21 | R$ 286,66 | R$ 101.480,04 |
| 18/01/2014 | R$ 892,16 | R$ 605,50 | R$ 286,66 | R$ 101.193,38 |
| 18/02/2014 | R$ 890,45 | R$ 603,79 | R$ 286,66 | R$ 100.906,72 |
| 18/03/2014 | R$ 888,74 | R$ 602,08 | R$ 286,66 | R$ 100.620,06 |
| 18/04/2014 | R$ 887,03 | R$ 600,37 | R$ 286,66 | R$ 100.333,40 |
| 18/05/2014 | R$ 885,32 | R$ 598,66 | R$ 286,66 | R$ 100.046,74 |
| 18/06/2014 | R$ 883,61 | R$ 596,95 | R$ 286,66 | R$ 99.760,08 |
| 18/07/2014 | R$ 881,90 | R$ 595,24 | R$ 286,66 | R$ 99.473,42 |
| 18/08/2014 | R$ 880,18 | R$ 593,52 | R$ 286,66 | R$ 99.186,76 |
| ... | ... | ... | ... | ... |
| 18/09/2041 | R$ 324,29 | R$ 37,63 | R$ 286,66 | R$ 6.019,86 |
| 18/10/2041 | R$ 322,58 | R$ 35,92 | R$ 286,66 | R$ 5.733,20 |
| 18/11/2041 | R$ 320,87 | R$ 34,21 | R$ 286,66 | R$ 5.446,54 |
| 18/12/2041 | R$ 319,16 | R$ 32,50 | R$ 286,66 | R$ 5.159,88 |
| 18/01/2042 | R$ 317,45 | R$ 30,79 | R$ 286,66 | R$ 4.873,22 |
| 18/02/2042 | R$ 315,74 | R$ 29,08 | R$ 286,66 | R$ 4.586,56 |
| 18/03/2042 | R$ 314,03 | R$ 27,37 | R$ 286,66 | R$ 4.299,90 |
| 18/04/2042 | R$ 312,32 | R$ 25,66 | R$ 286,66 | R$ 4.013,24 |
| 18/05/2042 | R$ 310,61 | R$ 23,95 | R$ 286,66 | R$ 3.726,58 |
| 18/06/2042 | R$ 308,90 | R$ 22,24 | R$ 286,66 | R$ 3.439,92 |
| 18/07/2042 | R$ 307,18 | R$ 20,52 | R$ 286,66 | R$ 3.153,26 |
| 18/08/2042 | R$ 305,47 | R$ 18,81 | R$ 286,66 | R$ 2.866,60 |
| 18/09/2042 | R$ 303,76 | R$ 17,10 | R$ 286,66 | R$ 2.579,94 |
| 18/10/2042 | R$ 302,05 | R$ 15,39 | R$ 286,66 | R$ 2.293,28 |
| 18/11/2042 | R$ 300,34 | R$ 13,68 | R$ 286,66 | R$ 2.006,62 |
| 18/12/2042 | R$ 298,63 | R$ 11,97 | R$ 286,66 | R$ 1.719,96 |
| 18/01/2043 | R$ 296,92 | R$ 10,26 | R$ 286,66 | R$ 1.433,30 |
| 18/02/2043 | R$ 295,21 | R$ 8,55 | R$ 286,66 | R$ 1.146,64 |
| 18/03/2043 | R$ 293,50 | R$ 6,84 | R$ 286,66 | R$ 859,98 |
| 18/04/2043 | R$ 291,79 | R$ 5,13 | R$ 286,66 | R$ 573,32 |
| 18/05/2043 | R$ 290,08 | R$ 3,42 | R$ 286,66 | R$ 286,66 |
| 18/06/2043 | R$ 288,37 | R$ 1,71 | R$ 286,66 | -R$ 0,00 |

$EX_3$ : O terceiro exemplo refere-se ao financiamento de um lote residencial que custou R$ 34.272,00 feito em 09/06/2015 pela própria construtora. O financiamento foi feito com uma entrada de R$ 3.672,00 e o saldo devedor dividido em 120 parcelas constantes e sem juros, porém com correção anual do saldo devedor tomando como referência o INCC/FGV conforme contrato exposto.

Figura 5.5: Contrato Exemplo 3

**V – DO PREÇO E DA FORMA DE PAGAMENTO**

**(Os valores indicados nesse item V do Quadro Resumo foram posicionados para a data de assinatura do presente Contrato, sendo certo que os valores objeto de pagamento parcelado serão atualizados monetariamente e sofrerão a incidência de juros, na forma prevista nesse Contrato).**

**V.a) PREÇO TOTAL DA UNIDADE: R$ 34.272,00 (TRINTA E QUATRO MIL, DUZENTOS E SETENTA E DOIS REAIS).**

**V.b) SINAL E PRINCÍPIO DE PAGAMENTO:**

| Tipo | Valor | Parcelas | Data Inicial |
|---|---|---|---|
| ENTRADA | R$ 459,00 | 1 | 09/06/2015 |
| ENTRADA | R$ 459,00 | 3 | 10/07/2015 |
| ENTRADA | R$ 306,00 | 1 | 10/10/2015 |
| ENTRADA | R$ 153,00 | 1 | 10/10/2015 |
| ENTRADA | R$ 459,00 | 3 | 10/11/2015 |

**V.c) VALOR OBJETO DE PAGAMENTO PARCELADO: R$ 30.600,00 (TRINTA MIL, SEISCENTOS REAIS).**

mensalmente.

**V.g) PARCELAS MENSAIS:** R$ 30.600,00 (TRINTA MIL, SEISCENTOS REAIS), a ser pago em 120 parcelas reajustáveis, nos termos do **Contrato**, de R$ 255,00 (DUZENTOS E CINQUENTA E CINCO REAIS), com vencimentos mensais e sucessivos nos dias 10, vencendo-se a primeira em 10/02/2016. Ao valor das referidas prestações serão adicionados, mensalmente, o valor dos prêmios de seguro contra morte e invalidez permanente ("**Seguro**"), que será definido a critério da VENDEDORA.

após a entrega da **Unidade.**

**V.e) ÍNDICES DE ATUALIZAÇÃO MONETÁRIA ANTES DA ENTREGA:** (1) Eleito: INCC/FGV (Índice Nacional de Custo da Construção); e (2) Substituto: outro que a ele mais se aproxime à época, exigido anualmente.

Teresina – PI, 09/06/2015.

Descontado o valor da entrada, restou R$ 30.600,00 para ser financiado, note que o valor da entrada foi pago de forma parcelada e sem nenhuma correção, valor este que não iremos detalhá-lo, pois o foco principal desta situação são as correções. Então o valor financiado, R$ 30.600,00, foi dividido em 120 parcelas mensais de R$ 255,00, o que resulta em um parcelamento sem juros. Porém, a cláusula V.e) prevê correção anual do saldo devedor através do índice INCC/FGV, isto significa que após a passagem de 1 ano da assinatura do contrato, as parcelas restantes sofrerão reajuste.

O INCC é o Índice Nacional de Custo da Construção, e é divulgado mensalmente pela Fundação Getúlio Vargas. Tem como objetivo estudar a evolução dos custos das construções habitacionais. Geralmente, este índice é utilizado em contratos de compra e venda de imóveis para correção dos valores enquanto a obra ainda está em fase de execução.

Durante o passar dos anos, o INCC apresentou um valor acumulado de 8,09% em 2013, 6,95% em 2014 e 7,48% em 2015. Tomando como base o acumulado de junho de 2015(data de assinatura do contrato) a junho de 2016, que o índice que incidirá no contrato será $6,46\%$, simularemos a primeira correção do contrato, as demais correções serão calculadas da mesma forma que a primeira levando em conta o INCC em seu período.

Assim sendo, a correção será da seguinte forma:

$$P = p \cdot (1 + i)$$

Onde,

$P$ é a prestação corrigida;

$p$ é a prestação antes da correção;

$i$ é o fator de correção.

No contrato que está sendo analisado temos que:

$p = R\$255,00$

$i = 6,49\%$ ou $0,0649$

$$P = p \cdot (1 + i) \Rightarrow P = 255 \cdot (1 + 0,0649) \Rightarrow P = R\$271,55$$

Logo, após a primeira correção a prestação será ajustada para R$ 271,55 e as demais correções seguem a mesma regra.

# 6 Considerações Finais

Este trabalho objetivava proporcionar uma melhor compreensão dos conteúdos ligados à Matemática Financeira e facilitar o entendimento das principais definições relacionadas ao assunto, bem como destacar a aplicabilidade do conhecimento deste ramo da matemática na resolução de problemas em nosso cotidiano.

Para tanto, foi feita uma exposição detalhada das principais definições relacionadas à matemática financeira e em seguida, estas definições foram identificadas em situações reais. Desta maneira, o aluno passa a despertar uma maior curiosidade para descobrir outras aplicações neste e em outros ramos da matemática, facilitando assim o seu entendimento em relação aos conteúdos matemáticos, pois ele está visualizando na prática o que tinha apenas como algo abstrato.

Para trabalhos futuros, pode ser feito um estudo identificando em exemplos reais os conceitos relacionados a outros tipos de sistemas de amortizações bem como outros conteúdos matemáticos.

# Referências


[1] CASTANHEIRA, Nelson Pereira; MACEDO, Luiz Roberto Dias. *Matemática Financeira Aplicada*. 20 ed. Curitiba: Ibpex, 2006.

[2] CRESPO, Arnot Antonio. *Matemática financeira fácil*. 14 ed. São Paulo: Saraiva, 2009.

[3] IEZZI, Gelson; HAZZAN, Samuel; DEGENSZAJN, David. *Fundamentos de Matemática Elementar: Matemática Comercial, Matemática Financeira, Estatística Descritiva*. 1 ed. São Paulo: Atual, 2004.

[4] LIMA, E. L. et al. *A Matemática do Ensino Médio. Vol.1 e Vol. 2. Coleção do Professor de Matemática*. 9 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[5] MATHIAS, W, F. GOMES, J, M. *Matemática Financeira*. 2 ed. São Paulo: Atlas, 1993.

[6] MORGADO, A,C. WAGNER,E. ZANI,S,C. *Progressões e Matemática Financeira*. 2 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2001.

[7] MORGADO, Augusto Cesar. *Matemática Discreta*. 1 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[8] MULLER, Aderbal Nicolas; ANTONIK, Luis Roberto. *Matemática Financeira: instrumentos financeiros para tomada de decisão em Administração, Economia e Contabilidade*. 1 ed. São Paulo: Saraiva, 2012.

[9] SAMANEZ, Carlos Patricio. *Matemática Financeira: Aplicações a Análise de Investimentos*. 3 ed. São Paulo: Prentice Hall, 2002.

[10] ZENTGRAF, Roberto. *Matemática Financeira Objetiva*. Rio de Janeiro: Editoração Ed, 1999.