UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO EM MATEMÁTICA

Sistemas Iterados de Funções Fracamente Hiperbólicos

Francimar de Brito Vieira

Teresina - 2020

Francimar de Brito Vieira

Dissertação de Mestrado:

Sistemas Iterados de Funções Fracamente Hiperbólicos

Dissertação submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Ítalo Dowell Lira Melo

Teresina - 2020

FICHA CATALOGRÁFICA
Serviço de Processamento Técnico da Universidade Federal do Piauí
Biblioteca Setorial do CCN

V657s Vieira, Francimar de Brito
Sistemas iterados de funções fracamente hiperbólicos / Francimar de Brito Vieira. – Teresina, 2020.
55 f.

Dissertação (Mestrado)– Universidade Federal do Piauí, Centro de Ciências da Natureza, Pós-Graduação em Matemática, 2020.
Orientador: Prof. Dr. Ítalo Dowell Lira Melo

1. Análise Funcional. 2. Sistemas Dinâmicos. 3. Medida Invariante. I. Título.

CDD 515.7

Bibliotecária : Caryne Maria da Silva Gomes / CRB3-1461

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Sistemas iterados de funções fracamente hiperbólicos

Francimar de Brito Vieira

Esta Dissertação foi submetida como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de **Mestre em Matemática**, outorgado pela Universidade Federal do Piauí.

A citação de qualquer trecho deste trabalho é permitida, desde que seja feita em conformidade com as normas da ética científica.

Dissertação aprovada em 11 de Fevereiro de 2020.

Banca Examinadora:

Ítalo Dowell Lira Melo

Prof. Dr. Ítalo Dowell Lira Melo - Orientador

Gleison do Nascimento Santos

Prof. Dr. Gleison do Nascimento Santos (UFPI)

Sergio Romaña I.

Prof. Dr. Sergio Augusto Romaña Ibarra (UFRJ)

À minha família.

Agradecimentos

Antes de tudo, agradeço a Deus pelo dom da vida e por todas as bênçãos derramadas sobre mim. Graças a Ele eu consegui concluir esta etapa da minha carreira acadêmica.

Agradeço a minha mãe Lucimar, uma mulher muito guerreira, que sempre esteve comigo e me apoiou em todos os momentos, principalmente naqueles em que eu pensei que tudo estava acabado.

Agradeço a minha noiva Naiana Fontenele, uma pessoa incrível que sempre acreditou em mim e me apoiou e incentivou quando eu mais precisei. Obrigado, amor!

Agradeço aos meus sobrinhos João Lucas e João Miguel, minhas principais fontes de inspiração. É neles que eu encontro força para superar as dificuldades do dia a dia.

Agradeço ao meu amigo Renato Siqueira pelo apoio que ele me deu desde a época da graduação.

Agradeço a minha madrinha Izelda e meu padrinho Manoel, por todas as palavras de incentivo que eles me dão todas as vezes que eu os visito.

Agradeço ao meu amigo Sandoel Vieira, que me ajudou todas as vezes em que eu pedi ajuda.

Agradeço ao meu amigo Antônio Amaral pelos vários conselhos que me deu e por todo o apoio oferecido.

Agradeço aos meus amigos do mestrado Christopher Carlisson, Dieme Silva, Douglas Rafael, Idalina Maria, Igor Fontenele, Jean Carlos, José Edilson, João Vinícius, José Márcio, Leonardo Nascimento, Lucas Emanuel, Marcelo Ferreira, Michell Dhouglas, Pedro Paulo, Pedro Rodrigues, Raimundo Bruno, Rafael Emanuel, Ruan Diego, Severino Pereira, Thassio Luan e Thiago Mayson. Tenho certeza que aprendi muito com vocês. Obrigado pelos momentos que passamos juntos, desde os mais divertidos até os mais desesperadores.

Agradeço a tantos outros amigos que, de alguma forma, me ajudaram para a realização deste grande sonho.

Agradeço aos professores do Departamento de Matemática da UFPI que me ajudaram de alguma forma, em especial ao professor Jurandir Lopes, Newton Santos e Roger Peres, que foram grandes conselheiros durante o mestrado.

Agradeço ao meu orientador Ítalo Melo, por ter me orientado tão bem neste trabalho e estar sempre disposto a me ajudar em todas as dúvidas que eu tive ao longo deste último ano. Muito obrigado também por todo o apoio, incentivo e conselhos, professor, eu não poderia ter um orientador melhor.

Agradeço aos professores Gleison Santos e Sergio Ibarra, por terem aceitado o convite para participar da banca.

Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.

"Continue andando. Haverá a chance de você ser barrado por um obstáculo, talvez por algo que você nem espere. Mas siga, até porque eu nunca ouvi falar de ninguém que foi barrado enquanto estava parado."

Charles F. Kettering.

Resumo

Neste trabalho, descreveremos resultados obtidos por Alexander Arbieto, André Junqueira e Bruno Santiago em 2017. Provamos a existência de atratores tanto topologicamente quanto sob o ponto de vista da medida teoricamente atratora. O estudo será dividido em dois casos: no primeiro caso trabalharemos com o espaço de fase sendo um espaço métrico compacto e no segundo caso trabalharemos com o espaço de fase sendo um espaço métrico completo.

Palavras-chave: Sistemas Iterados de Funções, Atratores, Medida Invariante

Abstract

In this work, we describe results obtained by Alexander Arbieto, André Junqueira and Bruno Santiago in 2017. We prove the existence of attractors both in the topological and measure theoretical viewpoint. The study will be divided into two cases: in the first case we will work with the phase space being a compact metric space and in the second case we will work with the phase space being a complete metric space.

Keywords: Iterated Function Systems, Attractors, Invariant Measure

Sumário

Introdução

O conceito de Sistema Iterado de Funções (IFS, na sigla em inglês) foi introduzido por Hutchinson em [4] como uma forma de gerar uma ampla classe de fractais, embora alguns resultados tenham aparecido no início de Williams em [11]. Existem aplicações de IFS em diversas áreas científicas como, por exemplo, no processamento de imagens, como pode ser visto em um artigo do Barnsley, [2]. Um IFS também pode ser visto como um produto torcido sobre a função shift (termos que serão apresentados nesta dissertação). Assim, pode ser considerado como um sistema dinâmico aleatório.

Hutchinson também introduziu o conceito de IFS hiperbólico, onde ele considera uma coleção finita de contrações $\varphi_1, \cdots, \varphi_N : X \to X$ sobre um espaço métrico completo X.

Aqui apresentamos o conceito de IFS fracamente hiperbólico, onde consideramos uma função contínua $\omega : \Lambda \times X \to X$ dada por $\omega(\lambda, x) = \omega_\lambda(x)$, com Λ sendo um espaço métrico compacto (chamado espaço de parâmetro) e X um espaço métrico completo. Ou seja, a cada elemento $\lambda \in \Lambda$ associa-se uma função contínua $\omega_\lambda : X \to X$. Com isso, definimos aqui alguns operadores do IFS, que são chamados de operador de Hutchinson-Barnsley e operador de transferência, assim definidos:

Operador de Hutchinson-Barnsley:

$$\mathcal{F} : \mathcal{K}(X) \to \mathcal{K}(X) \text{ dado por } \mathcal{F}(A) := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \omega_\lambda(A).$$

Operador de transferência:

$$T_p : \mathcal{M}_1(X) \to \mathcal{M}_1(X) \text{ dado por } T_p(\mu) := \int_\Lambda (\omega_\lambda)_*(\mu)\ dp(\lambda),$$

onde $*$ representa o *operador push-forward*.

Motivados pelo estudo de IFS fracamente hiperbólico apresentamos também o conceito de conjunto atrator de um IFS e de conjunto invariante por um IFS.

No caso particular em que X é apenas um espaço métrico compacto, apresentamos três importantes resultados. O primeiro traz informações acerca do conjunto atrator do IFS

(Teorema 5) e os dois resultados seguintes, Teorema 9 e Teorema 10, tratam da medida teoricamente atratora, medida que, por definição, é um ponto atrator do operador de transferência.

No caso mais geral em que X é um espaço métrico completo, definimos o que é um espaço métrico ϵ-encadeado, e sob estas e outras condições obtemos mais dois resultados, em que o Teorema 14 trata da existência de um conjunto atrator e o Teorema 15 da existência da medida invariante. Por fim, ainda no caso completo, definimos o que significa a órbita de um IFS desenhar um conjunto atrator e daí então é estabelecido o Teorema 16. Os resultados apresentados aqui foram baseados no artigo de Arbieto, Junqueira e Santiago [1].

Capítulo 1

Noções Preliminares

1.1 Teoria da Medida

1.1.1 Álgebra e σ-álgebra

Definição 1. *Seja* X *um conjunto não vazio. Uma álgebra de conjuntos sobre* X *é uma coleção* $\mathcal{A}$ *de subconjuntos de* X*, fechada para a união finita e complementaridade, isto é,*

1. *Se* $E_1, E_2, \cdots, E_n \in \mathcal{A}$ *então* $E_1 \cup \cdots \cup E_n \in \mathcal{A}$.

2. *Se* $E \in \mathcal{A}$ *então* $E^c \in \mathcal{A}$.

Observação 1. *Se a álgebra* $\mathcal{A}$ *é fechada para uniões enumeráveis ela será chamada de* σ*-álgebra.*

Definição 2. *Seja* ξ *um subconjunto do conjunto das partes de* X*. A* σ*-álgebra gerada por* ξ *é dada pela intersecção de todas as* σ*-álgebras sobre* X *que contém* ξ *e indicaremos ela por* $M(\xi)$*.*

Definição 3. *A* σ*-álgebra de Borel* B_X *de um espaço métrico (ou topológico)* X *é a* σ*-álgebra gerado pelos conjuntos abertas de* X *(ou equivalente, pelos fechados de* X*), constituída pelos conjuntos de Borel de* X *ou, simplesmente, borelianos de* X*.*

1.1.2 Medidas

Definição 4. *Seja* X *um conjunto com uma* σ*-álgebra* $\mathcal{A}$*. Uma medida em* $\mathcal{A}$*, é uma função* $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ *com as propriedades abaixo*

1. $\mu(\emptyset) = 0$;

2. *Se* $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é uma sequência de conjuntos disjuntos em* $\mathcal{A}$*, então vale*

$$\mu\left(\bigcup_{n\geqslant 1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

Definição 5. *Seja* X *um conjunto qualquer e* $\mathcal{A}$ *uma* σ*-álgebra sobre* X

1. *O par* $(X, \mathcal{A})$ *é dito um espaço mensurável e os conjuntos em* $\mathcal{A}$ *são chamados conjuntos mensuráveis.*

2. *Se* μ *é uma medida em* $(X, \mathcal{A})$*, a terna* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *é dita ser um espaço de medida.*

3. *Dado um espaço de medida, a medida* μ *é dita finita se* $\mu(X) < +\infty$*.*

4. *Quando* $\mu(X) = 1$*, então* μ *é dita ser uma medida de probabilidade.*

Sejam $(X_j, \mathcal{A}_j, \mu_j)$, $j = 1, ..., n$ espaços de medida finita, isto é, tais que $\mu_j(X_j) < \infty$. É possível tornar o produto cartesiano $X_1 \times \cdots \times X_n$ um espaço de medida, da seguinte forma. Considere em $X_1 \times \cdots \times X_n$ a σ-álgebra gerada pela família de todos os conjuntos da forma $A_1 \times \cdots \times A_n$ com $A_j \in \mathcal{A}_j$. Ela é chamada de σ-*álgebra produto* e é representada por $\mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_n$.

Teorema 1. *Existe uma única medida* μ *em* $(X_1 \times \cdots \times X_n, \mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_n)$ *tal que* $\mu(A_1 \times \cdots \times A_n) = \mu(A_1) \cdots \mu(A_n)$ *para todo* $A_1 \in \mathcal{A}_1, \cdots, A_n \in \mathcal{A}_n$*. Em particular,* μ *é uma medida finita.*

Demonstração. Ver Teorema A.2.12. de [9]. □

Sejam $(X_j, \mathcal{B}_j, \mu_j)$, $j \in \mathcal{I}$ espaços de medida com $\mu_j(X_j) = 1$ para todo $j \in \mathcal{I}$, onde o conjunto de índices tanto pode ser $\mathcal{I} = \mathbb{N}$ como $\mathcal{I} = \mathbb{Z}$. Considere o produto cartesiano

$$X = \prod_{j\in\mathcal{I}} X_j = \{(x_j)_{j\in\mathcal{I}};\ x_j \in X_j\}.$$

Definição 6. *Chamamos cilindros de* X *os subconjuntos da forma*

$$[m; A_m, ..., A_n] = \{(x_j)_{j\in\mathcal{L}} : x_j \in A_j \ \ \textit{para} \ \ m \leqslant j \leqslant n\},$$

onde $m \in \mathcal{I}$*,* $n \geqslant m$ *e* $A_j \in \mathcal{B}_j$ *para* $m \leqslant j \leqslant n$*.*

Exemplo 1. *Note que o próprio* X_1 *é um cilindro, uma vez que podemos escrever* $X_1 = [1;\ X_1]$.

Definição 7. *A* σ*-álgebra* $\mathcal{B} = \prod_{j \in \mathcal{J}} \mathcal{B}_j$ *é gerada por todos os cilindros da forma* $[m;\ A_m, ..., A_n]$.

Teorema 2. *Existe uma única medida* μ *em* $(X, \mathcal{B})$ *tal que*

$$\mu([m;\ A_m, ..., A_n]) = \mu_m(A_m) \cdots \mu_n(A_n)$$

para qualquer cilindro $[m;\ A_m, ..., A_n]$. *Em particular,* μ *é uma probabilidade.*

Demonstração. Ver Teorema A.2.13 de [9]. □

1.1.3 Alguns Resultados de Convergência

Lema 1 (Fatou)**.** *Seja* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *um espaço de medida e* $h_n : X \to [0, +\infty]$ *funções mensuráveis. Então*

a) $\displaystyle\int \liminf h_n\ d\mu \leqslant \liminf \int h_n\ d\mu.$

b) Em particular, se $h_n \to h$, *então* $\int h\ d\mu \leqslant \liminf \int h_n\ d\mu$.

Demonstração. Ver Lema 3.3.6. de [3] □

Teorema 3 (Teorema da Convergência Dominada)**.** *Seja* X *um espaço de medida qualquer, dotado de uma* σ*-álgebra* $\mathcal{A}$ *e de uma medida* μ. *Sejam* $f, f_1, f_2, \cdots : X \to \mathbb{C}$ *funções mensuráveis tais que* $f_n \to f$ *em* μ*-q.t.p. (isto é,* $\mu(\{x \in X; f_n(x) \not\to f(x)\}) = 0$*). Suponha que exista* $g : X \to [0, +\infty]$ *uma função integrável tal que* $|f_n(x)| \leqslant g(x)$ *em* μ*-q.t.p.* $x \in X$. *Então* $\int f_n\ d\mu \to \int f\ d\mu$.

Demonstração. Ver Teorema 3.3.7. de [3] □

1.2 Análise Funcional

Definição 8. *Uma norma no espaço vetorial* X *sobre o corpo* $\mathbb{K}$, *onde* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ *é uma função* $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ *que satisfaz as seguintes condições:*

(i) $\|x\| \geqslant 0\ \ \forall x \in X$;

(ii) $\|x\| = 0 \iff x = 0$;

(iii) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$ *e* $\forall x \in X$;

(iv) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|, \quad \forall x, y \in X$.

O par $(X, \|\cdot\|)$ *é chamado de espaço normado.*

Definição 9 (Espaço de Banach)**.** *Chamamos de espaço de Banach um espaço normado que é completo com a métrica induzida pela norma.*

Exemplo 2. *O espaço normado* $\mathbb{R}$ *é um espaço de Banach, pois toda sequência de Cauchy de números reais converge.*

Definição 10. *Seja* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *um espaço de medida. Definimos o espaço de funções* $L^1(\mu)$ *como* $L^1(\mu) := \{f : X \to \mathbb{C};\ f$ *é integrável*$\}$.

Definição 11 (Espaço de Hilbert)**.** *Chamamos de espaço de Hilbert um espaço com produto interno, que é completo com a norma induzida por este produto interno.*

Exemplo 3. *Se* $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *é um espaço de medida, então* $L^2(X)$ *é um espaço de Hilbert com produto interno definido por*

$$\langle f, g \rangle_2 := \int_X f(x)\overline{g(x)}\ d\mu(x), \quad f, g \in L^2(X).$$

Definição 12. *Um operador linear* $A : H \to H$ *em um espaço de Hilbert* H *é dito positivo se satisfizer a condição:*

$$\langle Ax, x \rangle \geqslant 0, \quad \forall\ x \in H.$$

1.3 Teoria Ergódica

Definição 13. *Dizemos que a medida* μ*, definida na* σ*-álgebra de* X *é de probabilidade, ou simplesmente probabilidade, quando* $\mu(X) = 1$.

Exemplo 4. *Seja* $X \neq \emptyset$ *um conjunto qualquer, e tome a álgebra* $\mathcal{A} := \mathcal{P}(X)$ *onde* $\mathcal{P}(X)$ *representa o conjunto das partes do conjunto* X*. Fixado um ponto* $a \in X$*, definimos a medida de Dirac* $\delta_a : \mathcal{A} \to [0, +\infty)$*, suportada em* a *por:*

$$\delta_a(A) := \begin{cases} 1, & \text{se } a \in A \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Definição 14. *Sejam* $(X, \mathcal{A})$ *e* $(Y, \mathcal{B})$ *espaços de medida. Dizemos que* $f : X \to Y$ *é uma transformação mensurável se* $f^{-1}(E) \in \mathcal{A}$*, para todo* $E \in \mathcal{B}$.

Definição 15. *Seja* $(X, \mathcal{B}, \mu)$ *um espaço de medida e seja* $f : X \to X$ *uma transformação mensurável. Dizemos que a medida* μ *é invariante por* f *se* $\mu(E) = \mu(f^{-1}(E))$ *para todo conjunto* $E \in \mathcal{B}$.

Definição 16. *Seja* μ *uma medida na* σ*-álgebra de* X. *Definimos o suporte da medida* μ *como sendo:*

$$\operatorname{supp}(\mu) = \overline{\{x \in X : \mu(V_x) \neq 0 \ \ \textit{para todo} \ \ V_x\}},$$

onde V_x *denota uma vizinhança aberta que contém* x.

Dada $f : X \to X$ e qualquer medida η em X, denota-se por $f_*\eta$ e chama-se *push-forward* a medida definida por $f_*\eta(B) = \eta(f^{-1}(B))$ para cada conjunto mensurável $B \subset X$. Note que η é invariante por f se, e somente se, $f_*\eta = \eta$.

Considere X um espaço métrico. Nosso objetivo agora é definir a topologia fraca* no conjunto $\mathcal{M}_1(X)$ das medidas borelianas de probabilidade em X e discutir as suas propriedades principais.

Denotaremos por d a função distância em X e por $B(x, \delta)$ a bola de centro $x \in X$ e raio $\delta > 0$. Dado $B \subset X$ denotamos $d(x, B) = \inf \{d(x, y) : y \in B\}$ e chamamos de δ-*vizinhança* de B ao conjunto B^δ dos pontos $x \in X$ tais que $d(x, B) < \delta$.

Dada uma medida $\mu \in \mathcal{M}_1(X)$, um conjunto finito $\Phi = \{\phi_1, \cdots, \phi_N\}$ de funções contínuas e limitadas $\phi_i : X \to \mathbb{R}$ e $\epsilon > 0$, definimos

$$V(\mu, \Phi, \epsilon) = \left\{ \nu \in \mathcal{M}_1(X) : \left| \int \phi_i \ d\nu - \int \phi_i \ d\mu \right| < \epsilon \text{ para todo } i \right\}. \tag{1.1}$$

Definimos a *topologia fraca** como sendo a topologia gerada pelas bases $V(\mu, \Phi, \epsilon)$ para cada μ, Φ, ϵ. Na Seção 2.3 apresentaremos um teorema que estabelece uma relação entre a topologia fraca* e a topologia de Hutchinson.

Lema 2. *Uma sequência* $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *converge para uma medida* $\mu \in \mathcal{M}_1(X)$ *na topologia fraca** *se, e somente se,*

$$\int \phi \ d\mu_n \to \int \phi \ d\mu \ \textit{para toda função contínua limitada} \ \phi : X \to \mathbb{R}.$$

Demonstração. Ver Lema 2.1.1. de [9]. □

O próximo teorema é de grande importância para a demonstração do Teorema 10.

Teorema 4 (Teorema Ergódico de Birkhoff)**.** *Seja* $f : M \to M$ *uma transformação mensurável e seja* μ *uma probabilidade invariante por* f. *Dada qualquer função integrável* $\varphi : M \to \mathbb{R}$, *o limite*

$$\widetilde{\varphi}(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x))$$

existe em μ-*q.t.p* $x \in M$. *Além disso, a função* $\widetilde{\varphi}$ *definida desta forma é integrável e satisfaz*

$$\int \widetilde{\varphi}(x) \quad d\mu(x) = \int \varphi(x) \quad d\mu(x).$$

Demonstração. A demonstração deste teorema pode ser encontrada no Apêndice. □

Capítulo 2

Sistemas Iterados de Funções Fracamente Hiperbólicos

2.1 Definições

Seja Λ um espaço métrico compacto e X um espaço métrico completo. Chamamos de *Sistema Iterado de Funções* (IFS, na sigla em inglês) uma função contínua $\omega : \Lambda \times X \to X$.

O espaço Λ é chamado *espaço de parâmetro* e X é o *espaço de fase*. O espaço $\Lambda^{\mathbb{N}}$ das sequências com elementos de Λ, com a topologia produto, será denotado por $\Omega := \Lambda^{\mathbb{N}}$.

Dado um parâmetro fixo $\lambda \in \Lambda$, denotaremos por $\omega_\lambda : X \to X$ a função parcial gerada por este parâmetro, a qual é definida por $\omega_\lambda(x) := \omega(\lambda, x)$, para todo $x \in X$.

Denotemos $\omega_{\lambda_1 \cdots \lambda_n} := \omega_{\lambda_1} \circ \cdots \circ \omega_{\lambda_n}$, onde $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \Lambda^n$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ denotemos por ω^n o IFS de $\Lambda^n \times X$ para X dado por

$$\omega^n(\lambda_1, \cdots, \lambda_n, x) := \omega_{\lambda_1 \cdots \lambda_n}(x).$$

Definição 17. *Sejam X e Λ espaços métricos compactos. Dizemos que um IFS $\omega : \Lambda \times X \to X$ é fracamente hiperbólico se para cada $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n, \cdots) \in \Omega$ temos*

$$\lim_{n \to \infty} \mathtt{Diam}\,(\omega_{\sigma_1 \cdots \sigma_n}(X)) = 0.$$

Observação 2. *Note que no caso particular em que ω_{σ_i} é uma contração para todo $\sigma_i \in \Lambda$, temos claramente um IFS fracamente hiperbólico.*

2.2 O Atrator Topológico

Denotemos por $\mathcal{K}(X)$ o conjunto de todos os subconjuntos compactos de X. Seja $d(x, F) = \inf\{d(x, y); y \in F\}$ a distância do ponto x ao conjunto F. Definimos a *métrica de Hausdorff* por

$$d_H(A, B) = \sup\{d(a, B), d(b, A); a \in A, b \in B\}, \text{ para } A, B \in \mathcal{K}(X).$$

Se (X, d) é um espaço métrico completo (respectivamente, compacto), pode-se provar que $(\mathcal{K}(X), d_H)$ é também um espaço métrico completo (respectivamente, compacto).

O *operador de Hutchinson-Barnsley* $\mathcal{F}: \mathcal{K}(X) \to \mathcal{K}(X)$ é definido por

$$\mathcal{F}(A) := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \omega_\lambda(A) = \omega(\Lambda \times A), \text{ para } A \in \mathcal{K}(X).$$

Definição 18. *Dizemos que um IFS tem um atrator* $A \in \mathcal{K}(X)$*, se existe uma vizinhança aberta* U *de* A *(chamada bacia de atração) tal que* $\mathcal{F}^n(B) \to A$ *na topologia de Hausdorff para cada* $B \in \mathcal{K}(X)$*, com* $B \subset U$*. Se* $A \in \mathcal{K}(X)$ *é um ponto fixo de* $\mathcal{F}$*, então dizemos que* A *é um conjunto invariante por* ω*. Se* $U = X$*, então o IFS tem um atrator global.*

Iremos tratar de atratores que podem não ser globais. A partir daqui, quando falarmos que um IFS tem um atrator, mas não fizermos nenhum comentário sobre a bacia de atração, estaremos falando de atratores globais.

O próximo resultado fornece a existência de um atrator global para um IFS fracamente hiperbólico.

Teorema 5. *Seja* ω *um IFS fracamente hiperbólico em um espaço métrico compacto* X *e com um espaço de parâmetro* Λ*. Então* $\mathcal{F}$ *tem um atrator* K*, que é também um conjunto compacto invariante. Além disso,* $\omega_{\sigma_1} \circ \cdots \circ \omega_{\sigma_n}$ *tem um único ponto fixo para todo* $\sigma \in \Omega$ *e* $n \geqslant 1$ *e também* K *é o fecho da união de todos os pontos fixos.*

O teorema acima será demonstrado na seção 2.4.

2.3 A Medida Teoricamente Atratora

Seja (X, d) um espaço métrico completo e separável e consideremos o espaço

$$\mathrm{Lip}_1(X; \mathbb{R}) = \{f: X \to \mathbb{R};\ |f(x) - f(y)| \leqslant d(x, y), \text{ para todo } x, y \in X\}.$$

Seja $\mathcal{M}_1(X)$ o conjunto das medidas de probabilidade de Borel μ tais que $\mu(f) = \int_X f \, d\mu < +\infty$ para cada $f \in \mathtt{Lip}_1(X; \mathbb{R})$.

Definimos a *métrica de Hutchinson* em $\mathcal{M}_1(X)$ por

$$H(\mu, \nu) = \sup \left\{ \left| \int_X f \, d\mu - \int_X f \, d\nu \right| ; f \in \mathtt{Lip}_1(X; \mathbb{R}) \right\}.$$

Teorema 6. *Seja X um espaço métrico separável. Então o espaço $(\mathcal{M}_1(X), H)$ é completo se, e somente se, X é completo.*

Demonstração. Ver demonstração em [6]. □

O teorema a seguir estabelece uma relação entre a topologia fraca* e a topologia de Hutchinson.

Teorema 7. *A topologia de Hutchinson e a topologia fraca* são equivalentes se, e somente se, $\mathtt{Diam}(X) < +\infty$. Além disso, se $\mathtt{Diam}(X) = \infty$, então a topologia de Hutchinson é mais fina do que a topologia fraca*.*

Demonstração. Ver demonstração em [6]. □

Quando (X, d) é um espaço métrico compacto, temos o seguinte resultado na metrizabilidade de $\mathcal{M}_1(X)$.

Teorema 8. *Se X é um espaço métrico compacto e $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é um conjunto denso na esfera unitária de $C(X)$ com a métrica uniforme, então*

$$D(\mu, \nu) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left| \int_X f_n \, d\mu - \int_X f_n \, d\nu \right|$$

é uma métrica em $\mathcal{M}_1(X)$ gerando a topologia fraca.*

Demonstração. Ver demonstração em [10]. □

Também temos uma noção de atrator sob o ponto de vista da medida teórica. Para explicar essa noção, definiremos o operador de transferência.

Definição 19. *Seja p uma medida de probabilidade em Λ. Definimos o operador de transferência $T_p : \mathcal{M}_1(X) \to \mathcal{M}_1(X)$ por*

$$T_p(\mu)(B) := \int_\Lambda \mu(\omega_\lambda^{-1}(B)) \, dp(\lambda),$$

para cada conjunto de Borel B e cada medida $\mu \in \mathcal{M}_1(X)$. Se a medida $\mu \in \mathcal{M}_1(X)$ é um ponto fixo do operador de transferência, dizemos que μ é uma medida invariante para ω.

Observação 3. *Algumas vezes omitiremos o conjunto* B *na definição e escreveremos*

$$T_p(\mu) := \int_\Lambda (\omega_\lambda)_*(\mu)\ dp(\lambda),$$

onde $*$ *representa o operador push-forward.*

Definição 20. *Dizemos que a probabilidade* $\nu \in \mathcal{M}_1(X)$ *é uma medida teoricamente atratora para* ω *se* $T_p^n(\mu) \to \nu$*, quando* $n \to \infty$ *na métrica de Hutchinson para todo* $\mu \in \mathcal{M}_1(X)$.

A seguir apresentamos um forte resultado que garante a existência de uma medida teoricamente atratora.

Teorema 9. *Se* X *é um espaço métrico compacto e* ω *é um IFS fracamente hiperbólico, então* ω *tem uma medida teoricamente atratora* $\nu \in \mathcal{M}_1(X)$*, o qual é o único ponto fixo do operador de transferência. Além disso, se* $p(U) > 0$ *para cada conjunto aberto não-vazio* $U \subset \Lambda$*, então temos que* $\mathrm{supp}(\nu) = K$*, onde* K *é o atrator topológico dado pelo Teorema 5.*

O teorema acima será demonstrado na seção 2.5.

Se ν é uma medida invariante para um IFS ω, então podemos definir a ergodicidade de ν.

Definição 21. *Fixe* $p \in \mathcal{M}_1(\Lambda)$ *e seja* $\mathbb{P} = p^{\mathbb{N}}$ *a medida produto. Dizemos que uma medida invariante* μ *para* ω *é ergódica se para cada função contínua* $f : X \to \mathbb{R}$*, cada* $x \in X$ *e* $\mathbb{P}$*-quase todo* $\sigma \in \Omega$ *temos:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n} f(\omega_{\sigma_j} \circ \cdots \circ \omega_{\sigma_1}(x)) = \int_X f\ d\mu.$$

Se $j = 0$*, então, por convenção,* $\omega_{\sigma_j} \circ \cdots \circ \omega_{\sigma_1}(x) = x$.

O próximo resultado trata da ergodicidade da medida teoricamente atratora.

Teorema 10. *Se* X *é um espaço métrico compacto e* ω *é um IFS fracamente hiperbólico, então a única medida teoricamente atratora é ergódica.*

O teorema acima será demonstrado na seção 2.6.

2.4 Demonstração do Teorema 5

Aqui usaremos a compacidade do espaço de fase para mostrar que $\mathtt{Diam}(\omega_{\sigma_1\cdots\sigma_n}(X))$ tende a zero uniformemente. Em seguida, usamos esse fato juntamente com a abordagem de Máté ([8]) para mostrar a existência do atrator. Para provar que tal atrator é o fecho do conjunto dos pontos fixos das funções parciais $\omega_{\sigma_1\cdots\sigma_n}$, aplicamos o teorema do ponto fixo de Jachymski (Teorema 12).

Lema 3. *Para cada* $n \in \mathbb{N}$, *a função* $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \Lambda^n \mapsto \mathtt{Diam}(\omega_{\lambda_1\cdots\lambda_n}(X)) \in \mathbb{R}$ *é uniformemente contínua com respeito a métrica do máximo.*

Demonstração. Seja $\epsilon > 0$. Denote por ρ a métrica de Λ e d a métrica de X. Dados $A \subset X$ e $t > 0$, definimos

$$B(A, t) := \{y \in X;\ d(y, A) \leqslant t\}.$$

Como $\omega^n : \Lambda^n \times X \to X$ é uniformemente contínua, existe $\delta > 0$ tal que se

$$\max\{\rho(\lambda_1, \lambda_1^*), \cdots, \rho(\lambda_n, \lambda_n^*), d(x, y)\} < \delta,$$

então

$$d\left(\omega_{\lambda_1\cdots\lambda_n}(x), \omega_{\lambda_1^*\cdots\lambda_n^*}(y)\right) < \epsilon.$$

Sejam $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n), (\lambda_1^*, \cdots, \lambda_n^*) \in \Lambda^n$ tais que

$$\max\{\rho(\lambda_1, \lambda_1^*), \cdots, \rho(\lambda_n, \lambda_n^*)\} < \delta.$$

Afirmação:

1. $\omega_{\lambda_1\cdots\lambda_n}(X) \subset B\left(\omega_{\lambda_1^*\cdots\lambda_n^*}(X), \epsilon\right)$;

2. $\omega_{\lambda_1^*\cdots\lambda_n^*}(X) \subset B\left(\omega_{\lambda_1\cdots\lambda_n}(X), \epsilon\right)$.

Com efeito, dado $y \in \omega_{\lambda_1\cdots\lambda_n}(X)$, existe $x \in X$ tal que $\omega_{\lambda_1\cdots\lambda_n}(x) = y$. Tome, portanto, $y^* = \omega_{\lambda_1^*\cdots\lambda_n^*}(x)$ e note que $d(y, y^*) = d(\omega_{\lambda_1\cdots\lambda_n}(x), \omega_{\lambda_1^*\cdots\lambda_n^*}(x)) < \epsilon$. Mas isto implica que $y \in B\left(\omega_{\lambda_1^*\cdots\lambda_n^*}(X), \epsilon\right)$, e portanto concluímos a demonstração do item 1 da afirmação. A demonstração do item 2 é análoga a do item 1.

Como ϵ é arbitrário, pela afirmação acima podemos concluir que os comprimentos dos diâmetros de $\omega_{\lambda_1\cdots\lambda_n}(X)$ e $\omega_{\lambda_1^*\cdots\lambda_n^*}(X)$ estão suficientemente próximos. Logo, a função $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \Lambda^n \mapsto \mathtt{Diam}(\omega_{\lambda_1\cdots\lambda_n}(X))$ é uniformemente contínua. $\square$

Lema 4. *Seja ω um IFS em um espaço métrico compacto X com um espaço de parâmetros compacto, então as seguintes afirmações são equivalentes.*

1. ω *é fracamente hiperbólico.*

2. *Dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant n_0$ e $\sigma \in \Omega$, temos* $\mathrm{Diam}\,(\omega_{\sigma_1 \cdots \sigma_n}(X)) < \epsilon$.

Demonstração. (2) $\Rightarrow$ (1) Imediato!

(1) $\Rightarrow$ (2) Suponha que (2) não acontece. Então existe $\epsilon_0 > 0$, uma sequência crescente $(n_k) \to \infty$ e uma sequência de palavras (com alfabeto em Λ) a qual denotamos por

$$(\sigma_1^1, \sigma_2^1, \cdots, \sigma_{n_1}^1), (\sigma_1^2, \sigma_2^2, \cdots, \sigma_{n_2}^2), \cdots$$

tais que

$$\mathrm{Diam}(\omega_{\sigma_1^k \cdots \sigma_{n_k}^k}(X)) \geqslant \epsilon_0 \text{ para qualquer } k \in \mathbb{N}. \tag{2.1}$$

Assim, temos a seguinte matriz formada pelas palavras:

$$\begin{array}{l}
\sigma_1^1\ \sigma_2^1\ \sigma_3^1 \cdots \sigma_{n_1}^1 \\
\sigma_1^2\ \sigma_2^2\ \sigma_3^2 \cdots \sigma_{n_1}^2 \cdots \sigma_{n_2}^2 \\
\sigma_1^3\ \sigma_2^3\ \sigma_3^3 \cdots \sigma_{n_1}^3 \cdots \sigma_{n_2}^3 \cdots \sigma_{n_3}^3 \\
\sigma_1^4\ \sigma_2^4\ \sigma_3^4 \cdots \sigma_{n_1}^4 \cdots \sigma_{n_2}^4 \cdots \sigma_{n_3}^4 \cdots \sigma_{n_4}^4 \\
\qquad\quad \vdots \\
\sigma_1^k\ \sigma_2^k\ \sigma_3^k \cdots \sigma_{n_1}^k \cdots \sigma_{n_2}^k \cdots \sigma_{n_3}^k \cdots \sigma_{n_4}^k \cdots \sigma_{n_k}^k \\
\qquad\quad \vdots
\end{array}$$

Agora, pela compacidade de Λ, obtemos uma subsequência convergente de $(\sigma_1^k)_{k\in\mathbb{N}}$ que converge em Λ, ou seja, existe $\mathbb{N}_1 \subset \mathbb{N}$ tal que $(\sigma_1^k)_{k\in\mathbb{N}_1}$ é convergente em Λ. Do mesmo modo, pela compacidade de Λ, a sequência $(\sigma_2^k)_{k\in\mathbb{N}_1}$ possui uma subsequência convergente em Λ, ou seja, existe $\mathbb{N}_2 \subset \mathbb{N}_1$ tal que $(\sigma_2^k)_{k\in\mathbb{N}_2}$ é convergente em Λ. Continuando nesse processo, obteremos uma sequência de conjuntos

$$\mathbb{N} \supset \mathbb{N}_1 \supset \mathbb{N}_2 \supset \cdots \mathbb{N}_k \supset \cdots.$$

Se nós definirmos por $\mathbb{N}^*$ o conjunto composto pelo primeiro elemento de $\mathbb{N}_1$, o segundo elemento de $\mathbb{N}_2$, e assim por diante, teremos que a matriz $\left(\sigma_j^k\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ $j \leqslant n_k$ possui todas as colunas convergentes em Λ. Assim, por simplicidade, podemos supor que a matriz inicial possui todas as colunas convergentes em Λ e definimos por $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \cdots) \in \Omega$ a sequência cujo j-ésimo termo é limite da j-ésima coluna. Para finalizarmos a prova, é suficiente provarmos que esta sequência não satisfaz a definição de hiperbolicidade fraca. Assim, fixe $m \in \mathbb{N}$. Como $(n_k) \to \infty$, então $n_k > m$, para todo k suficientemente grande. Portanto, segue-se de (2.1) que

$$\mathrm{Diam}(\omega_{\sigma_1^k\sigma_2^k\cdots\sigma_m^k}(X)) \geqslant \mathrm{Diam}(\omega_{\sigma_1^k\sigma_2^k\cdots\sigma_{n_k}^k}(X)) \geqslant \epsilon_0$$

para k suficientemente grande. Como $\lim_{k\to\infty}(\sigma_1^k, \sigma_2^k, \cdots, \sigma_m^k) \to (\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_m)$ na métrica do máximo, concluímos pelo Lema 3 que $\mathrm{Diam}(\omega_{\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_m}(X)) \geqslant \epsilon_0$. Como m é arbitrário, isto contradiz a definição de hiperbolicidade fraca, concluindo então a prova do lema. $\square$

Definição 22. *Seja* $\omega : \Lambda \times X \to X$ *um IFS. Para cada* $\sigma \in \Omega, n \in \mathbb{N}$ *e* $x \in X$*, defina* $\Gamma(\sigma, n, x) := \omega_{\sigma_1\cdots\sigma_n}(x)$*. Dizemos que* ω *satisfaz a Propriedade* P^* *se*

$$\Gamma(\sigma) := \lim_{n\to\infty} \Gamma(\sigma, n, x) \tag{2.2}$$

existe para cada $\sigma \in \Omega$ *e todo* $x \in X$*, não dependendo de* x *e é uniforme em* $\sigma \in \Omega$ *e* $x \in X$.

Proposição 1. *Todo IFS fracamento hiperbólico* $\omega : \Lambda \times X \to X$*, com* X *e* Λ *espaços métricos compactos satisfaz a propriedade* P^*.

Demonstração. Tome $x \in X$ e $\epsilon > 0$. Pelo Lema 4 sabemos que existe $n_0 = n_0(\epsilon)$ tal que

$$\mathrm{Diam}(\omega_{\sigma_1\cdots\sigma_n}(X)) < \epsilon,$$

para todo $\sigma \in \Omega$ e todo $n \geqslant n_0$. Observe que

$$\Gamma(\sigma, n, x) \in \omega_{\sigma_1\cdots\sigma_n}(X)$$

e como $\omega_{\sigma_{n+1}\cdots\sigma_{n+p}}(X) \subset X$, temos

$$\Gamma(\sigma, n+p, x) \in \omega_{\sigma_1\cdots\sigma_{n+p}}(X) \subset \omega_{\sigma_1\cdots\sigma_n}(X),$$

e então temos que $d(\Gamma(\sigma, n, x), \Gamma(\sigma, n+p, x)) \leqslant \mathrm{Diam}(\omega_{\sigma_1\cdots\sigma_n}(X)) < \epsilon$, para todo $n \geqslant n_0$ e $p \in \mathbb{N}$. Assim, a sequência $(\Gamma(\sigma, n, x))_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy e portanto, converge para todo $x \in X$ e $\sigma \in \Omega$. Agora, tome $\sigma \in \Omega$ e $x, y \in X$. Observe que

$$\Gamma(\sigma, n, x), \Gamma(\sigma, n, y) \in \omega_{\sigma_1\cdots\sigma_n}(X),$$

e então

$$d(\Gamma(\sigma, n, x), \Gamma(\sigma, n, y)) < \epsilon, \quad \text{se} \quad n \geqslant n_0,$$

e portanto a convergência acima independe de x e converge uniformemente em σ e $x \in X$.

Isto conclui a demonstração. □

Agora iremos provar que se um IFS $\omega : \Lambda \times X \to X$ satisfaz a propriedade P^* para Λ sendo um espaço compacto arbitrário, então é garantida a existência de um atrator. Antes, precisaremos de alguns lemas, onde o primeiro deles afirma que o operador de Hutchinson-Barnsley é contínuo. A prova que apresentaremos aqui também funciona no caso em que X é completo, mas não necessariamente compacto, e este caso será usado posteriormente.

Lema 5. *Seja X um espaço métrico completo e Λ um espaço métrico compacto. Se $\omega : \Lambda \times X \to X$ é contínuo, então o operador de Hutchinson-Barnsley $\mathcal{F}$ também é contínuo.*

Demonstração. Fixe um conjunto compacto $K \subset X$ e tome $\epsilon > 0$. Como ω é contínuo e Λ é compacto, existe $\delta > 0$ tal que se $x \in K$ e $y \in X$ com $d(x, y) < \delta$, então

$$d(\omega_\lambda(x), \omega_\lambda(y)) < \epsilon, \quad \text{para todo} \quad \lambda \in \Lambda.$$

Assuma que $A \in \mathcal{K}(X)$ é tal que $d_H(A, K) < \delta$. Seja $x \in K$ e tome $a \in A$ de modo que $d(x, a) = d(x, A) < \delta$. Como $a \in A$, temos $\omega(a) \in \omega_\lambda(A)$ e então

$$d(\omega_\lambda(x), \omega_\lambda(A)) \leqslant d(\omega_\lambda(x), \omega_\lambda(a)) < \epsilon, \quad \text{para todo} \quad \lambda \in \Lambda.$$

De maneira similar, seja $a \in A$ e tome $x \in K$ de modo que $d(a, x) = d(a, K) < \delta$, então

$$d(\omega_\lambda(a), \omega_\lambda(K)) \leqslant d(\omega_\lambda(a), \omega_\lambda(x)) < \epsilon, \quad \text{para todo} \quad \lambda \in \Lambda.$$

Portanto,

$$d_H(\omega_\lambda(A), \omega_\lambda(K)) = \sup\{d(\omega_\lambda(a), \omega_\lambda(K)), d(\omega_\lambda(x), \omega_\lambda(A)); a \in Ax \in K\} \leqslant \epsilon,$$

ou seja,

$$d_H(\omega_\lambda(A), \omega_\lambda(K)) \leqslant \epsilon, \quad \text{para todo} \quad \lambda \in \Lambda,$$

e logo,

$$d_H(\mathcal{F}(A), \mathcal{F}(K)) = d_H(\omega(\Lambda \times A), \omega(\Lambda \times K)) \leqslant \epsilon.$$

Isto conclui a demonstração do lema. □

Observe que o Proposição 1 define uma função $\Gamma: \ \Omega \to X$, dada por

$$\Gamma(\sigma) = \lim_{n\to\infty} \Gamma(\sigma, n, x), \ \text{para qualquer } x \in X.$$

Lema 6. *A função* $\Gamma: \ \Omega \to X$ *é contínua na topologia produto em* Ω.

Demonstração. Denotemos por ρ a métrica de Λ. Pela Proposição 1, para cada $\sigma \in \Omega$ fixado e para todo $\epsilon > 0$, existe $m = m(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(\omega_{\sigma_1} \circ \cdots \circ \omega_{\sigma_m}(x), \Gamma(\sigma)) < \epsilon, \ \text{para todo } x \in X.$$

Usando que ω^m é contínuo, obtemos $\delta > 0$ tal que se

$$\max\{\rho(\sigma_1^*, \sigma_1), \cdots, \rho(\sigma_m^*, \sigma_m)\} < \delta$$

então

$$d(\omega_{\sigma_1^* \cdots \sigma_m^*}(x), \omega_{\sigma_1 \cdots \sigma_m}(x)) < \epsilon, \ \text{para todo } x \in X.$$

Seja U a vizinhança de σ na topologia produto dada por

$$U = B_\rho(\sigma_1, \delta) \times \cdots \times B_\rho(\sigma_m, \delta) \times \Lambda \times \cdots.$$

Note que se $\sigma^* \in U$, então:

$$\begin{aligned} d(\Gamma(\sigma^*), \Gamma(\sigma)) &\leqslant d(\Gamma(\sigma), \omega_{\sigma_1 \cdots \sigma_m}(x)) + d(\omega_{\sigma_1 \cdots \sigma_m}(x), \omega_{\sigma_1^* \cdots \sigma_m^*}(x)) \\ &\quad + d(\omega_{\sigma_1^* \cdots \sigma_m^*}(x), \Gamma(\sigma^*)) \\ &< 3\epsilon, \end{aligned}$$

e isto conclui a demonstração do lema. □

Finalmente, usaremos o teorema do ponto fixo de Jachymski. Esse teorema é uma generalização do teorema do ponto fixo de Banach. Antes de apresentar, precisamos de uma definição.

Definição 23. *Seja* (X, d) *um espaço métrico. Dizemos que uma função* $T: X \to X$ *é uma contração assintótica se* $d(T^n(x), T^n(y)) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ *para todos* $x, y \in X$ *e existe* $\eta > 0$ *tal que esta convergência é uniforme para* x, y, *com* $d(x, y) \leqslant \eta$.

Teorema 11 (Cantor - Tychonov)**.** *Sejam* M_i $(i = 1, 2, \cdots)$ *espaços métricos compactos. Então* $M = \prod_{i\in\mathbb{N}} M_i$ *é um espaço métrico compacto.*

Demonstração. Ver Capítulo 8 em [7]. □

Teorema 12 (Jachymski)**.** *Suponha que* (X, d) *é um espaço métrico completo e* $T: X \to X$ *é uma contração assintótica contínua. Então T tem um único ponto fixo p e*

$$d(T^n(x), p) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ para todo } x \in X.$$

Demonstração. Ver a demonstração em [5]. □

Demonstração do Teorema 5. Observe que se $A \in \mathcal{K}(X)$, então

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(A) &= \bigcup_{\lambda_1\in\Lambda} \omega_{\lambda_1}(A) \\
\mathcal{F}^2(A) &= \mathcal{F}(\mathcal{F}(A)) \\
&= \mathcal{F}\left(\bigcup_{\lambda_1\in\Lambda} \omega_{\lambda_1}(A)\right) \\
&= \bigcup_{\lambda_2\in\Lambda} \omega_{\lambda_2}\left(\bigcup_{\lambda_1\in\Lambda} \omega_{\lambda_1}(A)\right) \\
&= \bigcup_{(\lambda_2,\lambda_1)\in\Lambda^2} \omega_{\lambda_2}(\omega_{\lambda_1}(A)) \\
\mathcal{F}^3(A) &= \mathcal{F}(\mathcal{F}^2(A)) \\
&= \mathcal{F}\left(\bigcup_{(\lambda_2,\lambda_1)\in\Lambda^2} \omega_{\lambda_2}(\omega_{\lambda_1}(A))\right) \\
&= \bigcup_{\lambda_3\in\Lambda} \omega_{\lambda_3}\left(\bigcup_{(\lambda_2,\lambda_1)\in\Lambda^2} \omega_{\lambda_2}(\omega_{\lambda_1}(A))\right) \\
&= \bigcup_{(\lambda_3,\lambda_2,\lambda_1)\in\Lambda^3} \omega_{\lambda_3}(\omega_{\lambda_2}(\omega_{\lambda_1}(A)))
\end{aligned}$$

Continuando assim, obtemos

$$\mathcal{F}^n(A) = \bigcup_{(\lambda_n,\cdots,\lambda_1)\in\Lambda^n} \omega_{\lambda_n} \circ \cdots \circ \omega_{\lambda_1}(A) = \bigcup_{(\lambda_n,\cdots,\lambda_1)\in\Lambda^n} \omega_{\lambda_n\cdots\lambda_1}(A).$$

Portanto, podemos escrever

$$\mathcal{F}^n(A) = \bigcup_{\sigma \in \Omega} \omega_{\sigma_1 \cdots \sigma_n}(A).$$

Defina

$$K := \Gamma(\Omega) = \left\{ \lim_{n\to\infty} \Gamma(\sigma, n, x); \quad \sigma \in \Omega \right\}$$

e observe que, como Λ é compacto e $\Omega = \Lambda^{\mathbb{N}}$, pelo Teorema 11 temos Ω compacto. Daí, como já vimos no Lema 6 que Γ é contínua, concluímos que K é compacto. Resta então provar que K é atrator. De fato, dado $B \subset X$ um conjunto compacto e $\epsilon > 0$ temos, pela Proposição 1, que existe $n_0 = n_0(\epsilon)$ tal que

$$d(\Gamma(\sigma, n, x), \Gamma(\sigma)) < \epsilon \text{ para todo } n \geqslant n_0, \ \sigma \in \Omega \text{ e } x \in B.$$

Fixe $n \geqslant n_0$. Dado $y \in \mathcal{F}^n(B)$, existe $\sigma' \in \Omega$ e $x \in B$ tais que

$$y = \omega_{\sigma'_1 \cdots \sigma'_n}(x) = \Gamma(\sigma', n, x).$$

Logo,

$$d(y, z) = d(\Gamma(\sigma', n, x), \Gamma(\sigma')) < \epsilon,$$

onde $z = \Gamma(\sigma')$.

De maneira análoga se mostra que para todo $z \in K$ existe $y \in \mathcal{F}^n(B)$ tal que $d(y, z) < \epsilon$. Isto implica que se $n \geqslant n_0$, então $d_H(\mathcal{F}^n(B), K) < \epsilon$, ou seja, $\lim\limits_{n\to+\infty} d_H(\mathcal{F}^n(B), K) = 0$ e portanto K é atrator de $\mathcal{F}$. Agora, pela continuidade de $\mathcal{F}$, temos

$$\lim_{n\to+\infty} d_H(\mathcal{F}(\mathcal{F}^n(B)), \mathcal{F}(K)) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} d_H(\mathcal{F}^{n+1}(B), \mathcal{F}(K)) = 0.$$

Como $\mathcal{F}^{n+1}(B)$ é uma subsequência de $\mathcal{F}^n(B)$, então estas devem ter o mesmo limite, ou seja, $\mathcal{F}(K) = K$, o que implica que K é um conjunto compacto invariante.

Para provar que $\omega_{\sigma_1} \circ \cdots \circ \omega_{\sigma_n}$ tem um único ponto fixo para todo $\sigma \in \Omega$ e $n \geqslant 1$, considere $g = \omega_{\sigma_1} \circ \cdots \circ \omega_{\sigma_n}$. Então temos que

$$g^m(x) = \omega_{\sigma_1} \circ \cdots \circ \omega_{\sigma_n} \circ \cdots \circ \omega_{\sigma_1} \circ \cdots \circ \omega_{\sigma_n}(x),$$

onde $\omega_{\sigma_1} \circ \cdots \circ \omega_{\sigma_n}$ aparece m vezes. Daí,

$$d(g^m(x), g^m(y)) \leqslant \mathrm{Diam}(\omega_{\sigma_1} \circ \cdots \circ \omega_{\sigma_n} \circ \cdots \circ \omega_{\sigma_1} \circ \cdots \circ \omega_{\sigma_n}(X)).$$

Como ω é um IFS fracamente hiperbólico, então $\mathrm{Diam}(\omega_{\sigma_1} \circ \cdots \circ \omega_{\sigma_n} \circ \cdots \circ \omega_{\sigma_1} \circ \cdots \circ \omega_{\sigma_n}(X)) \to 0$ quando $m \to \infty$ e então $d(g^m(x), g^m(y)) \to 0$ para todos $x, y \in X$ e esta convergência é uniforme em X, ou seja, g é uma contração assintótica. Daí, pelo Teorema 12, g possui um único ponto fixo, o qual denotamos por $q_{\sigma_1 \cdots \sigma_n}$. Para finalizar a demonstração vamos mostrar que o conjunto que todos esses pontos fixos é denso em K. Para isso, vamos usar o mesmo argumento do Hutchinson.

Denote $A_{\sigma_1 \cdots \sigma_p} := \omega_{\sigma_1 \cdots \sigma_p}(A)$. Usando o fato de K ser invariante, obtemos

$$K = \mathcal{F}(K) = \mathcal{F}(\mathcal{F}(K)) = \mathcal{F}^2(K) = \cdots = \mathcal{F}^p(K) = \bigcup_{\sigma_1 \cdots \sigma_p} \omega_{\sigma_1 \cdots \sigma_p}(K),$$

donde

$$\begin{aligned} K_{\sigma_1 \cdots \sigma_p} &= \omega_{\sigma_1 \cdots \sigma_p}(K) \\ &= \omega_{\sigma_1 \cdots \sigma_p}\left(\bigcup_{\sigma_{p+1}} \omega_{\sigma_{p+1}}(K) \right) \\ &= \bigcup_{\sigma_{p+1}} \omega_{\sigma_1 \cdots \sigma_p}\left(\omega_{\sigma_{p+1}}(K)\right) \\ &= \bigcup_{\sigma_{p+1}} \omega_{\sigma_1 \cdots \sigma_{p+1}}(K). \end{aligned}$$

Daí segue que

$$K \supset K_{\sigma_1} \supset \cdots \supset K_{\sigma_1 \cdots \sigma_p} \supset \cdots$$

Como K é compacto e ω é um IFS fracamente hiperbólico, então a interseção de todos estes conjuntos é apenas um ponto, o qual denotaremos por k_σ, para algum $\sigma = (\sigma_1, \cdots, \sigma_p, \cdots) \in \Omega$.

Agora, $k_\sigma \in K_{\sigma_1, \cdots, \sigma_p}$ e $q_{\sigma_1 \cdots \sigma_p} \in K_{\sigma_1, \cdots, \sigma_p}$. Pela hiperbolicidade fraca do IFS obtemos que

$$k_\sigma = \lim_{p \to +\infty} q_{\sigma_1 \cdots \sigma_p},$$

e isto conclui a demonstração do teorema. □

2.5 Demonstração do Teorema 9

Queremos mostrar que todo IFS fracamente hiperbólico tem uma medida teoricamente atratora.

A demonstração consiste em mostrarmos que as iterações de uma medida de Dirac pelo operador de transferência convergem para uma medida de probabilidade e mostrar que esta é invariante pelo IFS. Depois devemos mostrar que $H(T_p^n \mu, T_p^n \delta_a) \to 0$, para qualquer medida de probabilidade μ.

A ideia inicial é estabelecer a continuidade do operador de transferência, que é o nosso primeiro lema.

Lema 7. *Se* $\omega : \Lambda \times X \to X$ *é contínua e* X *é compacto, então para todo* $p \in \mathcal{M}_1(\Lambda)$, *o operador de transferência* T_p *é contínuo na topologia fraca*.*

Demonstração. Suponha que $\mu_n \to \mu$ na topologia fraca* de $\mathcal{M}_1(X)$. Devemos mostrar que $T_p \mu_n \to T_p \mu$.

De fato, tome $f \in C(X)$ e observe que

$$\int_X f \; dT_p \mu_n = \int_\Lambda \int_X f \circ \omega_\lambda \; d\mu_n dp = \int_X \int_\Lambda f \circ \omega_\lambda \; dp \; d\mu_n.$$

Veja que a função $\Phi : X \to \mathbb{R}$ definida por $\Phi(x) = \int_\Lambda f \circ \omega_\lambda(x) \; dp$ é contínua. Daí, como $\mu_n \to \mu$ na topologia fraca*, segue que

$$\int_X \Phi \; d\mu_n \to \int_X \Phi \; d\mu, \tag{2.3}$$

ou seja,

$$\int_X \int_\Lambda f \circ \omega_\lambda \; dp \; d\mu_n \to \int_X \int_\Lambda f \circ \omega_\lambda \; dp \; d\mu. \tag{2.4}$$

Mas veja que

$$\int_X \int_\Lambda f \circ \omega_\lambda \; dp \; d\mu = \int_\Lambda \int_X f \circ \omega_\lambda \; d\mu dp = \int_X f \; dT_p \mu. \tag{2.5}$$

Portanto, de (2.3), (2.4) e (2.5), concluímos que $T_p \mu_n \to T_p \mu$. □

Agora iremos mostrar a existência de uma medida invariante.

Lema 8. *Para todo* $a \in X$, *a sequência de medidas* $(T_p^n(\delta_a))$ *é convergente na topologia fraca* em* $\mathcal{M}_1(X)$. *Como consequência disso,* $\nu = \lim_{n \to \infty} (T_p^n(\delta_a))$ *é uma medida invariante para o IFS* ω.

Demonstração. Devemos inicialmente provar que $(T_p^n(\delta_a))$ é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{M}_1(X)$. Se provarmos que $\int_X f \; dT_p^n(\delta_a)$ é uma sequência de Cauchy para cada $f \in C^0(X)$ com $\|f\|_0 = 1$, então pelo Teorema 8 teremos que $T_p^n(\delta_a)$ também será uma sequência de

Cauchy, uma vez que D é uma métrica em $\mathcal{M}_1(X)$. De fato, se para todo $\epsilon > 0$ existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left|\int_X f\ dT_p^m(\delta_a) - \int_X f\ dT_p^n(\delta_a)\right| < \epsilon, \quad \text{para todos} \quad m, n > n_0,$$

então

$$D(T_p^m(\delta_a), T_p^n(\delta_a)) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}\left|\int_X f\ dT_p^m(\delta_a) - \int_X f\ dT_p^n(\delta_a)\right| < \epsilon, \ \text{para todos} \ m, n > n_0.$$

Pela definição do operador de transferência, temos que

$$\begin{aligned} \int_X f\ dT_p^n(\delta_a) &= \int_{\Lambda^n}\int_X f(\omega_{\sigma_1} \circ \cdots \circ \omega_{\sigma_n}(x))\ d\delta_a dp^n \\ &= \int_{\Lambda^n} f(\omega_{\sigma_1} \circ \cdots \circ \omega_{\sigma_n}(a))\ dp^n \\ &= \int_{\Lambda^n} f \circ \Gamma(\sigma, n, a)\ dp^n. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Tome $n > m$. Então do fato de p ser uma probabilidade, obtemos

$$\int_{\Lambda^m} f \circ \Gamma(\sigma, m, a)\ dp^m = \int_{\Lambda^{n-m}}\int_{\Lambda^m} f \circ \Gamma(\sigma, m, a)\ dp^m dp^{n-m},$$

daí,

$$\begin{aligned} \left|\int_X f\ dT_p^n(\delta_a) - \int_X f\ dT_p^m(\delta_a)\right| &= \left|\int_{\Lambda^n} f \circ \Gamma(\sigma, n, a)\ dp^n - \int_{\Lambda^m} f \circ \Gamma(\sigma, m, a)\ dp^m\right| \\ &\leqslant \left|\int_{\Lambda^n} f \circ \Gamma(\sigma, n, a)\ dp^n - \int_{\Lambda^{n-m}}\int_{\Lambda^m} f \circ \Gamma(\sigma, m, a)\ dp^m dp^{n-m}\right| \\ &= \left|\int_{\Lambda^n} (f \circ \Gamma(\sigma, n, a) - f \circ \Gamma(\sigma, m, a))\ dp^n\right| \\ &\leqslant \int_{\Lambda^n} |f \circ \Gamma(\sigma, n, a) - f \circ \Gamma(\sigma, m, a)|\ dp^n, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\left|\int_X f\ dT_p^n(\delta_a) - \int_X f\ dT_p^m(\delta_a)\right| \leqslant \int_{\Lambda^n} |f \circ \Gamma(\sigma, n, a) - f \circ \Gamma(\sigma, m, a)|\ dp^n. \tag{2.7}$$

Observe que f é uniformemente contínua, uma vez que esta é contínua e está definida num compacto. Assim, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $d(x, y) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$ e, consequentemente, pela Proposição 1, existe $n_0 = n_0(\epsilon)$ tal que se $m, n \geqslant n_0$, então

$$d(\Gamma(\sigma, n, a), \Gamma(\sigma, m, a)) < \delta \Rightarrow |f \circ \Gamma(\sigma, n, a) - f \circ \Gamma(\sigma, m, a)| < \epsilon.$$

Portanto, de (2.7) temos que

$$\begin{aligned}\left|\int_X f\ dT_p^n(\delta_a) - \int_X f\ dT_p^m(\delta_a)\right| &\leqslant \int_{\Lambda^n} |f \circ \Gamma(\sigma, n, a) - f \circ \Gamma(\sigma, m, a)|\ dp^n \\ &< \int_{\Lambda^n} \epsilon\ dp^n \\ &= \epsilon.\end{aligned}$$

Logo, $(T_p^n(\delta_a))$ é uma sequência de Cauchy. Como $\mathcal{M}_1(X)$ é um espaço métrico compacto, existe $\nu = \lim_{n\to\infty}(T_p^n(\delta_a))$.

Pela continuidade do operador T_p provada no Lema 7, segue que

$$\nu = \lim_{n\to\infty} T_p^n(\delta_a) = \lim_{n\to\infty} T_p^{n+1}(\delta_a) = \lim_{n\to\infty} T_p(T_p^n(\delta_a)) = T_p(\lim_{n\to\infty} T_p^n(\delta_a)) = T_p(\nu).$$

Assim, concluímos que ν é uma medida invariante. $\square$

O nosso próximo passo consistirá em provar que ν é de fato uma medida teoricamente atratora do IFS.

Lema 9. *Para todo $\mu \in \mathcal{M}_1(X)$ e $a \in X$ as sequências $(T_p^n(\delta_a))$ e $(T_p^n(\mu))$ têm o mesmo limite na topologia fraca*. Como consequência, $(T_p^n(\mu)) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \nu$ na topologia fraca* se $\mu \in \mathcal{M}_1(X)$.*

Demonstração. Como antes, é suficiente provar que se $||f||_0 = 1$, então

$$\left|\int_X f\ dT_p^n(\mu) - \int_X f\ dT_p^n(\delta_a)\right| \to 0.$$

Tome $\epsilon > 0$ e observe que

$$\int_X f\ dT_p^n(\mu) = \int_{\Lambda^n}\int_X f(\omega_{\sigma_1} \circ \cdots \circ \omega_{\sigma_n}(x))\ d\mu dp^n = \int_{\Lambda^n}\int_X f \circ \Gamma(\sigma, n, x)\ d\mu dp^n. \quad (2.8)$$

Como μ é uma probabilidade, temos que

$$\int_X f \circ \Gamma(\sigma, n, a)\ d\mu = f \circ \Gamma(\sigma, n, a) \cdot \mu(X) = f \circ \Gamma(\sigma, n, a).$$

Daí obtemos

$$\begin{aligned}\left|\int_X f\ dT_p^n(\mu) - \int_X f\ dT_p^n(\delta_a)\right| &= \left|\int_{\Lambda^n}\int_X f \circ \Gamma(\sigma, n, x)\ d\mu dp^n - \int_{\Lambda^n} f \circ \Gamma(\sigma, n, a)\ dp^n\right| \\ &= \left|\int_{\Lambda^n}\int_X f \circ \Gamma(\sigma, n, x)\ d\mu dp^n - \int_{\Lambda^n}\int_X f \circ \Gamma(\sigma, n, a)\ d\mu dp^n\right| \\ &= \left|\int_{\Lambda^n}\int_X (f \circ \Gamma(\sigma, n, x) - f \circ \Gamma(\sigma, n, a))\ d\mu dp^n\right| \\ &\leqslant \int_{\Lambda^n}\int_X |f \circ \Gamma(\sigma, n, x) - f \circ \Gamma(\sigma, n, a)|\ d\mu dp^n.\end{aligned}$$

Da continuidade uniforme de f e da Proposição 1, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 = n_0(\epsilon)$ tal que se $n > n_0$, então $|f \circ \Gamma(\sigma, n, x) - f \circ \Gamma(\sigma, n, a)| < \epsilon$ e portanto

$$\int_{\Lambda^n} \int_X |f \circ \Gamma(\sigma, n, x) - f \circ \Gamma(\sigma, n, a)| \; d\mu dp^n < \epsilon.$$

Como $\int_X f \; dT_p^n(\delta_a) \to \int_X f \; d\nu$, segue que

$$\int_X f \; dT_p^n(\mu) \to \int_X f \; d\nu.$$

Isto conclui a demonstração do lema. □

Para finalizar a demonstração do teorema, resta provarmos que $\text{supp}(\nu) = K$.

Defina para cada $\lambda \in \Lambda$ a função $\eta_\lambda : \; \Omega \to \Omega$ por $\eta_\lambda(\sigma_1, \sigma_2, \cdots) := (\lambda, \sigma_1, \sigma_2, \cdots)$. Observe que, dados $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \cdots) \in \Omega$ e $x \in X$, temos

$$\begin{aligned}
\Gamma \circ \eta_\lambda(\sigma) &= \lim_{n\to\infty} \Gamma(\eta_\lambda(\sigma), n, x) \\
&= \lim_{n\to\infty} \Gamma((\lambda, \sigma_1, \sigma_2, \cdots), n, x) \\
&= \lim_{n\to\infty} \omega_\lambda \circ \omega_{\sigma_1} \circ \cdots \circ \omega_{\sigma_{n-1}}(x) \\
&= \lim_{n\to\infty} \omega_\lambda(\Gamma(\sigma, n-1, x)) \\
&= \omega_\lambda(\lim_{n\to\infty} \Gamma(\sigma, n-1, x)) \\
&= \omega_\lambda \circ \Gamma(\sigma),
\end{aligned}$$

ou seja, $\Gamma \circ \eta_\lambda = \omega_\lambda \circ \Gamma$.

Lema 10. *Se* $\mathbb{P}$ *é a medida produto em* Ω *induzida por* $p \in \mathcal{M}_1(\Lambda)$, *então temos que* $\Gamma_*(\mathbb{P}) = \nu$.

Demonstração. Provaremos que $\Gamma_*(\mathbb{P})$ é ponto fixo do operador de transferência para ω. Daí, como já provamos que este possui um único ponto fixo, seguirá o resultado.

Como $\Gamma \circ \eta_\lambda = \omega_\lambda \circ \Gamma$, então $(\omega_\lambda)_*(\Gamma_*(\mathbb{P})) = \Gamma_*((\eta_\lambda)_*(\mathbb{P}))$.

Agora observe que $\mathbb{P}$ é um ponto fixo do operador de transferência para o IFS $\eta : \; \Lambda \times \Omega \to \Omega$.

De fato,

$$\begin{aligned} T_p(\Gamma_*(\mathbb{P})) &= \int_\Lambda (\omega_\lambda)_*(\Gamma_*(\mathbb{P}))\ dp(\lambda) \\ &= \int_\Lambda \Gamma_*((\eta_\lambda)_*\mathbb{P})\ dp(\lambda) \\ &= \Gamma_*\left(\int_\Lambda (\eta_\lambda)_*\mathbb{P}\ dp(\lambda)\right) \\ &= \Gamma_*(\mathbb{P}). \end{aligned}$$

Isto conclui a demonstração do Lema. □

Afirmamos que $\operatorname{supp}(\nu) = \Gamma(\operatorname{supp}(\mathbb{P}))$. De fato, tome $a \in \operatorname{supp}(\mathbb{P})$ e seja V uma vizinhança aberta de $\Gamma(a)$. Como Γ é contínua, segue que $\Gamma^{-1}(V)$ é aberto, logo $\mathbb{P}(\Gamma^{-1}(V)) = \Gamma_*(\mathbb{P})(V) = \nu(V) > 0$, isto prova que $\Gamma(a) \in \operatorname{supp}(\nu)$ e portanto mostramos que $\Gamma(\operatorname{supp}(\mathbb{P})) \subset \operatorname{supp}(\nu)$.

Agora considere $a \in \operatorname{supp}(\nu)$ e suponha que $a \notin \Gamma(\operatorname{supp}\mathbb{P})$, temos dois casos a analisar:

i. $a \in \operatorname{Im}\Gamma$, mas $a \notin \Gamma(\operatorname{supp}\mathbb{P})$;

ii. $a \notin \operatorname{Im}\Gamma$.

No primeiro caso, $\Gamma^{-1}(a) \notin \operatorname{supp}\mathbb{P}$ e como $\Gamma^{-1}(\{a\})$ e $\operatorname{supp}\mathbb{P}$ são conjuntos compactos, existe um aberto U contendo $\Gamma^{-1}(a)$ tal que $U \cap \operatorname{supp}\mathbb{P} = \emptyset$, daí $\mathbb{P}(U) = 0$, mas isto contradiz a hipótese.

No segundo caso, existe um aberto V contendo a tal que $V \cap \operatorname{Im}\Gamma = \emptyset$. Daí, $\nu(V) = \Gamma_*(\mathbb{P})(V) = \mathbb{P}(\Gamma^{-1}(V)) = 0$.

$$\begin{aligned} \nu(V) &= \Gamma_*(\mathbb{P})(V) \\ &= \mathbb{P}(\Gamma^{-1}(V)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Isto é uma contradição, pois $a \in \operatorname{supp}(\nu)$. Assim, mostramos que $\operatorname{supp}(\nu) \subset \Gamma(\operatorname{supp}(\mathbb{P}))$, e portanto,

$$\begin{aligned} \operatorname{supp}(\nu) &= \Gamma(\operatorname{supp}(\mathbb{P})) \\ &= \Gamma(\Omega) \\ &= K. \end{aligned}$$

Isto conclui a demonstração do Teorema 9.

2.6 Demonstração do Teorema 10

Para demonstrarmos o Teorema 10, usaremos a ergodicidade da função *shift* $\beta: \Omega \to \Omega$ (também chamada de *deslocamento de Bernoulli*), a qual é dada por

$$\beta(\sigma_1, \sigma_2, \cdots) = (\sigma_2, \sigma_3, \cdots).$$

Lembremos que a medida produto $\mathbb{P}$ em Ω é uma medida ergódica invariante para a função shift. Este resultado pode ser encontrado em [9], Proposição 4.2.7.

Uma ferramenta para relacionar a função shift com o IFS é a função *produto torcido* $\tau: \Omega \times X \to \Omega \times X$, a qual é definida por

$$\tau(\sigma, x) := (\beta(\sigma), \omega_{\sigma_1}(x)).$$

Vamos mostrar como relacionar as médias ergódicas para o IFS com as médias ergódicas para o produto torcido. Fixe $f: X \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Vamos estender f para $\Omega \times X$ definindo $f': \Omega \times X \to \mathbb{R}$ por $f'(\sigma, x) = f(x)$. Observe que

$$\int_{\Omega \times X} f' \, d(\mathbb{P} \times \nu) = \int_X f \, d\nu. \tag{2.9}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
f'(\tau^n(\sigma, x)) &= f'(\tau^{n-1} \circ \tau(\sigma, x)) \\
&= f'(\tau^{n-1}(\beta(\sigma), \omega_{\sigma_1}(x))) \\
&= f'(\tau^{n-2} \circ \tau(\beta(\sigma), \omega_{\sigma_1}(x))) \\
&= f'(\tau^{n-2}(\beta^2(\sigma), \omega_{\sigma_2} \circ \omega_{\sigma_1}(x))) \\
&\ \ \vdots \\
&= f'(\beta^n(\sigma), \omega_{\sigma_n} \circ \cdots \circ \omega_{\sigma_1}(x)) \\
&= f(\omega_{\sigma_n} \circ \cdots \circ \omega_{\sigma_1}(x)).
\end{aligned}$$

Então,

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f'(\tau^j(\sigma, x)) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(\omega_{\sigma_j} \circ \cdots \circ \omega_{\sigma_1}(x)). \tag{2.10}$$

A seguir apresentamos um teorema que será fundamental para o próximo resultado.

Teorema 13. *Seja* $f: M \to M$ *uma transformação mensurável e* μ *uma medida em* M. *Então* f *preserva* μ *se, e somente se,*

$$\int \varphi \, d\mu = \int \varphi \circ f \, d\mu,$$

para toda função integrável $\varphi: \ M \to \mathbb{R}$.

Demonstração. Ver Proposição 1.1.1. de [9]. □

O teorema vale se considerarmos funções integráveis limitadas.

O seguinte resultado nos permite obter uma medida invariante para o produto torcido a partir de uma medida invariante para o IFS.

Lema 11. *Sejam* X *e* Λ *espaços métricos compactos. Se* $\mu \in \mathcal{M}_1(X)$ *é uma medida invariante para um IFS* $\omega: \ \Lambda \times X \to X$, *então a medida* $\mathbb{P} \times \mu$ *é invariante por* τ.

Demonstração. Pelo Teorema 13 basta mostrar que para toda função integrável limitada $f: \ \Omega \times X \to \mathbb{R}$ temos:

$$\int_{\Omega\times X} f \circ \tau \ d(\mathbb{P} \times \mu) = \int_{\Omega\times X} f \ d(\mathbb{P} \times \mu).$$

Para isto, podemos alternar a ordem de integração e usar uma decomposição adequada de Ω. Precisamente, observe que a medida produto Ω coincide nos cilindros com a medida produto em $\Lambda \times \Omega$. Como a σ-álgebra é gerada por cilindros, segue-se que os dois espaços de medida coincidem. Portanto, podemos decompor qualquer integração em Ω como uma integração em $\Lambda \times \Omega$. Usando isto, podemos escrever

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega\times X} f \circ \tau \ d(\mathbb{P} \times \mu) &= \int_{\Omega\times X} f(\beta(\sigma), \omega_{\sigma_1}(x)) \ d(\mathbb{P} \times \mu) \\
&= \int_{\Omega} \int_{X} f(\beta(\sigma), \omega_{\sigma_1}(x)) \ d\mu d\mathbb{P} \\
&= \int_{\Lambda} \int_{\Omega} \int_{X} f(\beta(\sigma), \omega_{\sigma_1}(x)) \ d\mu d\mathbb{P}(\sigma_2, \sigma_3, \cdots) dp(\sigma_1) \\
&= \int_{\Omega} \int_{\Lambda} \int_{X} f(\beta(\sigma), \omega_{\sigma_1}(x)) \ d\mu dp(\sigma_1) d\mathbb{P}(\sigma_2, \sigma_3, \cdots). \qquad (2.11)
\end{aligned}$$

Para cada $(\sigma_2, \sigma_3, \cdots)$ defina

$$\widetilde{H}(x) = f((\sigma_2, \sigma_3, \cdots), x).$$

Omitiremos a dependência de $(\sigma_2, \sigma_3, \cdots)$ por simplicidade.

Como, por hipótese, μ é invariante pelo IFS, então $T_p(\mu) = \mu$. Daí,

$$\int_X \widetilde{H} \ dT_p\mu = \int_\Lambda \int_X \widetilde{H} \circ \omega_\lambda \ d\mu dp.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\int_X \widetilde{H}(x)\ d\mu &= \int_\Lambda \int_X \widetilde{H} \circ \omega_{\sigma_1}(x)\ d\mu dp(\sigma_1) \\ &= \int_\Lambda \int_X f((\sigma_2, \sigma_3, \cdots), \omega_{\sigma_1}(x))\ d\mu dp(\sigma_1) \\ &= \int_\Lambda \int_X f(\beta(\sigma), \omega_{\sigma_1}(x))\ d\mu dp(\sigma_1).\end{aligned}$$

Substituindo em (2.11), obtemos

$$\begin{aligned}\int_{\Omega\times X} f \circ \tau\ d(\mathbb{P}\times\mu) &= \int_\Omega \left(\int_\Lambda \int_X f(\beta(\sigma), \omega_{\sigma_1}(x))\ d\mu dp(\sigma_1) \right) d\mathbb{P}(\sigma_2, \sigma_3, \cdots) \\ &= \int_\Omega \int_X \widetilde{H}(x)\ d\mu d\mathbb{P} \\ &= \int_\Omega \int_X f((\sigma_2, \sigma_3, \cdots), x)\ d\mu d\mathbb{P} \\ &= \int_{\Omega\times X} f((\sigma_2, \sigma_3, \cdots), x)\ d(\mathbb{P}\times\mu) \\ &= \int_{\Omega\times X} f\ d(\mathbb{P}\times\mu).\end{aligned}$$

Isto conclui a demonstração do Lema. □

Demonstração do Teorema 10. Seja $K \subset X$ o único atrator de ω e ν a única medida invariante (garantida pelo Teorema 9).

Queremos mostrar que para todo $x \in X, \mathbb{P}$-q.t.p. $\sigma \in \Omega$, e para qualquer função contínua $f : X \to \mathbb{R}$ temos:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(\omega_{\sigma_j} \circ \cdots \circ \omega_{\sigma_1}(x)) = \int_X f\ d\nu.$$

O primeiro passo é mostrar que o limite do lado esquerdo existe para $\mathbb{P}$-q.t.p., $\sigma \in \Omega$. Pela equação (2.10), temos

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(\omega_{\sigma_j} \circ \cdots \circ \omega_{\sigma_1}(x)) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f'(\tau^j(\sigma, x)).$$

Pelo Lema 11, $\mathbb{P}\times\nu$ é invariante por τ. Daí, pelo Teorema Ergódico de Birkhoff, obtemos que para $\mathbb{P}\times\nu$-q.t.p. (σ, x),

$$f^*(\sigma, x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f'(\tau^j(\sigma, x)) \tag{2.12}$$

existe.

Consideremos o conjunto

$$\Omega^* = \{\sigma \in \Omega;\ \text{existe } x \in X \text{ tal que } f^*(\sigma, x) \text{ está definida}\}.$$

Afirmamos que $\mathbb{P}(\Omega^*) = 1$. De fato, suponhamos que $\mathbb{P}(\Omega^*) < 1$, então existe algum $A \subset \Omega$, com $\mathbb{P}(A) > 0$, tal que se $\sigma \in A$, então $f^*(\sigma, x)$ não existe para todo $x \in X$. Pelo Teorema de Fubini, isto implica a existência de um conjunto de $\mathbb{P} \times \nu-$medida positiva em $\Omega \times X$ tal que $f^*(\sigma, x)$ não existe, e isto contraria (2.12).

Agora, vamos ver que a Proposição 1 implica que se $f^*(\sigma, x)$ existe para algum $x \in X$ então $f^*(\sigma, y)$ também existe para todo $y \in X$, e $f^*(\sigma, x) = f^*(\sigma, y)$.

Para provar isto, fixemos (σ, x) tal que $f^*(\sigma, x)$ existe, e seja $y \in X$ qualquer. Pela desigualdade triangular, obtemos que

$$|f^*(\sigma, x) - f^*(\sigma, y)| \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \left| f'(\tau^j(\sigma, x)) - f'(\tau^j(\sigma, y)) \right| .$$

Assim, precisamos apenas provar que

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \left| f'(\tau^j(\sigma, x)) - f'(\tau^j(\sigma, y)) \right| \to 0, \tag{2.13}$$

quando $n \to \infty$.

Pela Proposição 1, temos que para todo $\delta > 0$ existe $n_0 = n_0(\delta)$ tal que se $n \geqslant n_0$, então

$$\sup_{\alpha\in\Omega} \ d(\omega_{\alpha_1} \circ \cdots \circ \omega_{\alpha_n}(a), \omega_{\alpha_1} \circ \cdots \circ \omega_{\alpha_n}(b)) \leqslant \delta, \quad \text{para todos} \quad a, b \in X.$$

Em particular, dados $a, b \in X, \sigma \in \Omega$, e $n \geqslant n_0$temos

$$d(\omega_{\alpha_n} \circ \cdots \circ \omega_{\alpha_1}(a), \omega_{\alpha_n} \circ \cdots \circ \omega_{\alpha_1}(b)) \leqslant \delta.$$

Agora, tome $\epsilon > 0$. Pela continuidade uniforme da f, existe $n_1 > 0$ tal que se $n \geqslant n_1$, então

$$|f(\omega_{\sigma_n} \circ \cdots \circ \omega_{\sigma_1}(a)) - f(\omega_{\sigma_n} \circ \cdots \circ \omega_{\sigma_1}(b))| < \epsilon,$$

para todos $a, b \in X$.

Tome $n_2 > n_1$ tal que $2\dfrac{n_1 C}{n_2} < \epsilon$, onde

$$C = \max_{0\leqslant j\leqslant n_1} \left\{ |f(\omega_{\sigma_j} \circ \cdots \circ \omega_{\sigma_1}(x))|, |f(\omega_{\sigma_j} \circ \cdots \circ \omega_{\sigma_1}(y))| \right\} .$$

Portanto, se $n \geqslant n_2$, então

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\left|f'(\tau^j(\sigma,x)) - f'(\tau^j(\sigma,y))\right| &= \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n_1-1}\left|f'(\tau^j(\sigma,x)) - f'(\tau^j(\sigma,y))\right| \\
&+ \frac{1}{n}\sum_{j=n_1}^{n-1}\left|f'(\tau^j(\sigma,x)) - f'(\tau^j(\sigma,y))\right| \\
&< \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n_1-1}\left(\left|f'(\tau^j(\sigma,x))\right| + \left|f'(\tau^j(\sigma,y))\right|\right) + \frac{1}{n}\sum_{j=n_1}^{n-1}\epsilon \\
&\leqslant \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n_1-1} 2C + \frac{1}{n}\sum_{j=n_1}^{n-1}\epsilon \\
&= \frac{2n_1C}{n} + \frac{(n-n_1)\epsilon}{n} \\
&\leqslant \frac{2n_1C}{n_2} + \epsilon - \frac{n_1\epsilon}{n} \\
&< 2\epsilon.
\end{aligned}$$

Como ϵ é arbitrário, isto mostra o que queríamos. Logo, $f^*(\sigma, x)$ é constante em x, para $\sigma \in \Omega^*$. Observe que a segunda parte do Teorema Ergódico de Birkhoff aplicado ao produto torcido τ implica que

$$\int_{\Omega\times X} f^*\ d(\mathbb{P}\times\nu) = \int_{\Omega\times X} f'\ d(\mathbb{P}\times\nu).$$

Pela igualdade (2.9), temos

$$\int_{\Omega\times X} f^*\ d(\mathbb{P}\times\nu) = \int_{\Omega\times X} f'\ d(\mathbb{P}\times\nu) = \int_X f\ d\nu. \tag{2.14}$$

Afirmamos que $f^*(\sigma, x)$ é constante para $\mathbb{P}$-q.t.p. $\sigma \in \Omega$.

De fato, fixe x e pense em $f^*(., x)$ como uma função em Ω, se provarmos que

$$f^*(\beta(\sigma), x) = f^*(\sigma, x), \tag{2.15}$$

então da ergodicidade de $(\beta, \mathbb{P})$ seguirá que $f^*(\sigma, x)$ é constante para $\mathbb{P}$-q.t.p. $\sigma \in \Omega$.

Tome $\sigma \in \Omega^* \cap \beta^{-1}(\Omega^*)$. Observe que

$$\left|\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} f'(\tau^j(\sigma,x)) - \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f'(\tau^j(\beta(\sigma),x))\right| \tag{2.16}$$
$$= \left|\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} f(\omega_{\sigma_j}\circ\cdots\circ\omega_{\sigma_1}(x)) - \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f(\omega_{\sigma_{j+1}}\circ\cdots\circ\omega_{\sigma_2}(x))\right|$$
$$\leqslant \frac{|f(x)|}{n(n+1)} + \frac{|f(\omega_{\sigma_1}(x))|}{n+1} + \left|\frac{1}{n+1}\left(\sum_{j=2}^{n} f(\omega_{\sigma_j}\circ\cdots\circ\omega_{\sigma_1}(x)) - \sum_{j=1}^{n-1} f(\omega_{\sigma_{j+1}}\circ\cdots\circ\omega_{\sigma_2}(x))\right)\right|$$
$$+ \frac{1}{n(n+1)}\left|\sum_{j=1}^{n-1} f(\omega_{\sigma_{j+1}}\circ\cdots\circ\omega_{\sigma_2}(x))\right|$$
$$\leqslant \frac{|f(x)|}{n(n+1)} + \frac{|f(y)|}{n+1} + \frac{1}{n+1}\cdot\sum_{j=2}^{n}\left|f(\omega_{\sigma_j}\circ\cdots\circ\omega_{\sigma_2}(y)) - f(\omega_{\sigma_j}\circ\cdots\circ\omega_{\sigma_2}(x))\right|$$
$$+ \frac{1}{n(n+1)}\left|\sum_{j=1}^{n-1} f(\omega_{\sigma_{j+1}}\circ\cdots\circ\omega_{\sigma_2}(x))\right|,$$

onde $y = \omega_{\sigma_1}(x)$.

Com o mesmo argumento usado em (2.13), concluímos que (2.16) converge a zero quando $n \to \infty$, e isto prova (2.15). Ou seja, $f^*(\sigma, x)$ é constante para $\mathbb{P}$-q.t.p. e, portanto, de (2.14) temos

$$\int_X f\, d\nu = \int_{\Omega\times X} f^*\, d(\mathbb{P}\times\nu) = f^*.$$

Logo, pelas equações (2.12) e (2.10), obtemos

$$\int_X f\, d\nu = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f(\omega_{\sigma_j}\circ\cdots\circ\omega_{\sigma_1}(x)),$$

como queríamos mostrar. $\square$

Capítulo 3

O Caso Completo

Propomos a seguinte definição como uma extensão do conceito de IFS fracamente hiperbólico.

Definição 24. *Seja* $\omega : \Lambda \times X \to X$ *um IFS contínuo, onde* (X, d) *é um espaço métrico completo. Dizemos que* ω *é fracamente* hiperbólico se para todos* $x, y \in X$ *e* $\sigma \in \Omega$ *temos:*

$$\lim_{n \to +\infty} d(\omega_{\sigma_1 \cdots \sigma_n}(x), \omega_{\sigma_1 \cdots \sigma_n}(y)) = 0,$$

onde a convergência é assumida uniforme em Ω *e localmente uniforme em* X*. Noutras palavras, existe* $\eta > 0$ *tal que para todo* $\epsilon > 0$ *existe* $n_0 = n_0(\epsilon)$ *tal que se* $n \geqslant n_0$ *então*

$$d(\omega_{\sigma_1 \cdots \sigma_n}(x), \omega_{\sigma_1 \cdots \sigma_n}(y)) < \epsilon,$$

para todo $\sigma \in \Omega$ *e* x, y *satisfazendo* $d(x, y) < \eta$.

Observação 4. *Note que no caso particular em que* ω_{σ_i} *é uma contração para todo* $\sigma_i \in \Lambda$*, temos claramente um IFS fracamente hiperbólico.*

No Capítulo 3 provaremos que se X é compacto, então um IFS ω é fracamente* hiperbólico se, e somente se, ω é fracamente hiperbólico. Apresentamos aqui resultados no caso completo. Segue abaixo o resultado sobre a existência de um atrator global topológico no caso completo.

Definição 25. *Seja* (M, d) *um espaço métrico. Dado* $\epsilon > 0$ *e* $x, y \in M$*, uma* $\epsilon-$*cadeia unindo* x *e* y *é uma sequência* $x_0 = x, x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n = y$ *de pontos em* M *tais que* $d(x_i, x_{i+1}) < \epsilon$*, para todo* $i = 0, \cdots, n-1$. $n + 1$ *é o número de elementos da cadeia. Dizemos que* M *é* $\epsilon-$*encadeado, se para quaisquer* $x, y \in M$ *existe uma* $\epsilon-$*cadeia unindo* x *e* y.

Agora que temos as ferramentas necessárias, apresentamos a seguir um teorema que garante a existência de um atrator.

Teorema 14. *Seja ω um IFS fracamente* hiperbólico em um espaço métrico completo X e com um espaço de parâmetros compacto Λ. Assuma que $(\mathcal{K}(X), d_H)$ é $\epsilon-$encadeado para todo $\epsilon > 0$. Então $\mathcal{F}$ tem um atrator K que é também um conjunto invariante compacto.*

O teorema acima será demonstrado na seção 3.2.

Observe que este teorema pode ser aplicado quando X é um espaço de Banach ou uma variedade Riemanniana completa.

Exemplo 5. *Considere o IFS $\omega : \Lambda \times X \to X$, com $\Lambda = \{1, 2, 3\}$ e $X = \mathbb{R}^2$, cujas funções são dadas por*

$$f_1(x, y) = \left(\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y\right);$$
$$f_2(x, y) = \left(\frac{1}{2}x + 1, \frac{1}{2}y\right);$$
$$f_3(x, y) = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}y + 1\right).$$

Observe que cada uma das funções é uma contração com coeficiente de contração igual a $\frac{1}{2}$. Portanto, este é um IFS fracamente hiperbólico.

O atrator para este IFS é conhecido como Triângulo de Sierpinski. A seguir temos uma imagem ilustrativa deste atrator.

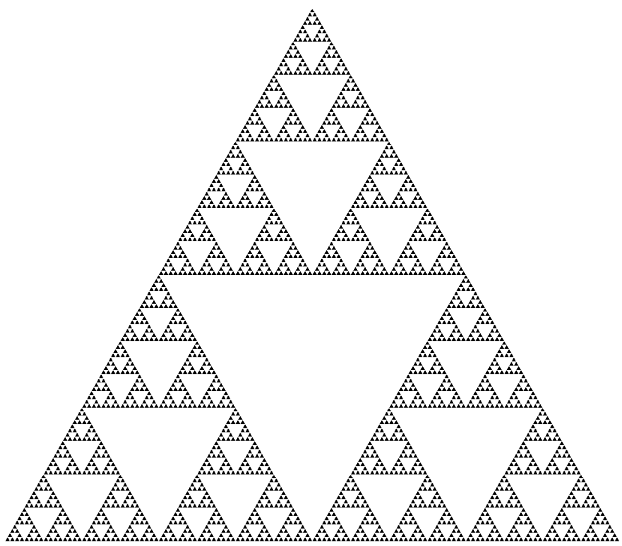

Figura 3.1: Triângulo de Sierpinski

Definição 26. *Dado $\epsilon > 0$, dizemos que um espaço métrico X é uniformemente $\epsilon-$encadeado em bolas se para toda bola $B(a, r) \subset X$ existe um inteiro $k = k(a, r, \epsilon)$ tal que para todos $x, y \in B(a, r)$ existe uma $\epsilon-$cadeia com, no máximo, k elementos unindo x e y.*

Outro resultado importante de IFS fracamente* hiperbólico garante a existência de uma única medida invariante, como segue.

Teorema 15. *Seja (X, d) um espaço métrico completo, uniformemente $\epsilon-$encadeado em bolas e com $(\mathcal{K}(X), d_H)$ $\epsilon-$encadeado, para todo $\epsilon > 0$. Se ω é um IFS fracamente hiperbólico, então existe uma única medida invariante $\nu \in \mathcal{M}_1(X)$ tal que* $\operatorname{supp}(\nu) \subset K$ *e na verdade temos* $\operatorname{supp}(\nu) = K$ *se $p(U) > 0$ para cada $U \subset \Lambda$ aberto, onde K é o atrator dado pelo Teorema 14. Além disso, se $\mu \in \mathcal{M}_1(X)$ tem suporte compacto então $T_p^n(\mu) \to \nu$ quando $n \to \infty$, na métrica de Hutchinson.*

O teorema acima será demonstrado na seção 3.3.

3.1 Desenhando o Atrator

Aqui apresentaremos um resultado que trata de como encontrar o conjunto atrator através de órbitas do IFS em vez de calcular através do operador de Hutchinson-Barnsley.

Definição 27. *Uma órbita do IFS iniciando em algum ponto x é um sequência $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ em X tal que $x_0 = x, x_k = \omega_{\sigma_k}(x_{k-1})$, para alguma sequência $\sigma = (\sigma_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \Omega$.*

Definição 28. *Dado um IFS $\omega : \Lambda \times X \to X$ com um atrator A, dizemos que uma órbita iniciando em x desenha o atrator, se as "caudas" desta órbita estão se aproximando do atrator A na métrica de Hausdorff, ou seja, se*

$$A = \lim_{k\to\infty} (x_n)_{n=k}^{\infty}, \text{ na métrica de Hausdorff.}$$

Dado um IFS $\omega : \Lambda \times X \to X$ com um atrator A (com bacia de atração U) e um ponto $x \in X$, denotamos por $\mathcal{A}(x) \subset \Omega$ o conjunto formado pelas sequências $(\sigma_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tais que a órbita correspondente $x_0 = x, x_k = \omega_{\sigma_k}(x_{k-1})$ desenha o atrator.

Definição 29. *Dizemos que uma probabilidade $p \in \mathcal{M}_1(\Lambda)$ é justa se existe uma função positiva $f : (0, +\infty) \to (0, 1]$ tal que*

$$p(B(\lambda, \delta)) \geqslant f(\delta), \text{ para todo } \lambda \in \Lambda.$$

Definição 30. *Um espaço métrico é dito próprio se toda bola fechada é compacta.*

O nosso próximo e último resultado diz respeito a órbitas do IFS que desenha o atrator.

Teorema 16. *Seja X um espaço métrico completo próprio, e $\omega : \Lambda \times X \to X$ um IFS contínuo. Suponha que ω tem um atrator A com bacia local de atração U. Então para todo ponto $x \in U$, temos $\mathbb{P}(\mathcal{A}(x)) = 1$.*

O teorema acima será demonstrado na seção 3.4.

Nosso próximo resultado diz que, no caso do espaço de fase compacto, as duas definições (fraca e fraca* hiperbolicidade) são as mesmas.

Teorema 17. *Suponhamos que Λ e X são espaços métricos compactos. Então um IFS $\omega : \Lambda \times X \to X$ é fracamente* hiperbólico se, e somente se, é fracamente hiperbólico.*

Demonstração. Suponhamos que ω é fracamente hiperbólico. Se $\sigma \in \Omega$ e $x, y \in X$, então

$$d(\omega_{\sigma_1 \cdots \sigma_n}(x), \omega_{\sigma_1 \cdots \sigma_n}(y)) \leqslant \mathrm{Diam}(\omega_{\sigma_1 \cdots \sigma_n}(X)).$$

Como ω é fracamente hiperbólico, obtemos que

$$\lim_{n \to \infty} \mathrm{Diam}(\omega_{\sigma_1 \cdots \sigma_n}(X)) = 0,$$

e portanto,

$$\lim_{n \to \infty} d(\omega_{\sigma_1 \cdots \sigma_n}(x), \omega_{\sigma_1 \cdots \sigma_n}(y)) = 0.$$

Pelo Lema 4, tal convergência é uniforme em Ω e X, e portanto, ω é fracamente* hiperbólico.

Reciprocamente, assuma que ω é fracamente* hiperbólico e tome $\sigma \in \Omega$.

Pela compacidade de X, existem sequências (x_n) e (y_n) em X tais que

$$\mathrm{Diam}(\omega_{\sigma_1 \cdots \sigma_n}(X)) = d(\omega_{\sigma_1 \cdots \sigma_n}(x_n), \omega_{\sigma_1 \cdots \sigma_n}(y_n)), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Como $\omega_{\sigma_1 \cdots \sigma_n}(X)$ é uma sequência de conjuntos encaixados, é suficiente mostrar que

$$d(\omega_{\sigma_1 \cdots \sigma_{n_k}}(x_{n_k}), \omega_{\sigma_1 \cdots \sigma_{n_k}}(y_{n_k})) \to 0, \text{ para alguma sequência } n_k \to \infty. \tag{3.1}$$

Pela compacidade de X, as sequências (x_n) e (y_n) admitem subsequências (x_{n_k}) e (y_{n_k}) convergentes em X tais que $(x_{n_k}) \to x$ e $(y_{n_k}) \to y$. Iremos mostrar, portanto que estas são as sequências desejadas para (3.1). Assim, tome $\epsilon > 0$ e considere $\eta > 0$ dado pela Definição **??**. Então existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que se $k \geqslant k_1$, então

$$d(x_{n_k}, x) < \eta \text{ e } d(y_{n_k}, y) < \eta \tag{3.2}$$

Como assumimos que ω é um IFS fracamente* hiperbólico, obtemos $k_2 \in \mathbb{N}$ tal que se $k \geqslant k_2$, então

$$d(\omega_{\sigma_1 \cdots \sigma_{n_k}}(x), \omega_{\sigma_1 \cdots \sigma_{n_k}}(y)) < \epsilon \tag{3.3}$$

Agora, consideremos $k_0 = \max\{k_1, k_2\}$. Se $k \geqslant k_0$, usando (3.2), (3.3) e a uniformidade local da Definição **??**, obtemos

$$\begin{aligned} d(\omega_{\sigma_1 \cdots \sigma_{n_k}}(x_{n_k}), \omega_{\sigma_1 \cdots \sigma_{n_k}}(y_{n_k})) &\leqslant d(\omega_{\sigma_1 \cdots \sigma_{n_k}}(x_{n_k}), \omega_{\sigma_1 \cdots \sigma_{n_k}}(x)) \\ &+ d(\omega_{\sigma_1 \cdots \sigma_{n_k}}(x), \omega_{\sigma_1 \cdots \sigma_{n_k}}(y)) \\ &+ d(\omega_{\sigma_1 \cdots \sigma_{n_k}}(y), \omega_{\sigma_1 \cdots \sigma_{n_k}}(y_{n_k})) \\ &\leqslant 3\epsilon. \end{aligned}$$

Isto mostra a veracidade de (3.1) e conclui a demonstração. □

3.2 Demonstração do Teorema 14

Aqui iremos provar a existência de um atrator no caso completo.

Demonstração do Teorema 14. Provaremos que o operador de Hutchinson-Barnsley é uma contração assintótica em $(\mathcal{K}(X), d_H)$. Tome $\epsilon > 0$ e considere $\eta > 0$ e $n_0 = n_0(\epsilon)$ dados pela Definição **??**. Suponhamos que $d_H(A, B) < \eta$, para algum $A, B \in \mathcal{K}(X)$. Temos que

$$\mathcal{F}^n(A) = \bigcup_{\sigma \in \Omega, x \in A} \omega_{\sigma_1 \cdots \sigma_n}(x) \;\text{ e }\; \mathcal{F}^n(B) = \bigcup_{\sigma \in \Omega, y \in B} \omega_{\sigma_1 \cdots \sigma_n}(y).$$

Se $c = \omega_{\sigma_1 \cdots \sigma_n}(a)$, com $a \in A$, então usando que $d_H(A, B) < \eta$, segue-se que existe $b \in B$ tal que $d(a, b) < \eta$. Assim, obtemos

$$d(\omega_{\sigma_1 \cdots \sigma_n}(a), \omega_{\sigma_1 \cdots \sigma_n}(b)) < \epsilon, \quad \text{se} \quad n \geqslant n_0.$$

Analogamente, se $z = \omega_{\sigma_1 \cdots \sigma_n}(b)$, com $b \in B$, então existe $a \in A$ tal que $d(a, b) < \eta$, e daí,

$$d(\omega_{\sigma_1 \cdots \sigma_n}(a), \omega_{\sigma_1 \cdots \sigma_n}(b)) < \epsilon, \quad \text{se} \quad n \geqslant n_0.$$

Portanto,

$$d_H(\mathcal{F}^n(A), \mathcal{F}^n(B)) < \epsilon \quad \text{para todo} \quad n \geqslant n_0.$$

Resta mostrar que

$$d_H(\mathcal{F}^n(A), \mathcal{F}^n(B)) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

para quaisquer $A, B \in \mathcal{K}(X)$. Como $\mathcal{K}$ é $\epsilon-$encadeado, existe $\{K_1, \cdots, K_p\} \subset \mathcal{K}(X)$ com $K_1 = A, K_p = B$ e $d_H(K_i, K_{i+1}) < \eta$, se $1 \leqslant i \leqslant p-1$. Então

$$d_H(\mathcal{F}^n(A), \mathcal{F}^n(B)) \leqslant d_H(\mathcal{F}^n(A), \mathcal{F}^n(K_2)) + \cdots + d_H(\mathcal{F}^n(K_{p-1}), \mathcal{F}^n(B)).$$

Mas como cada um dos termos do lado direito tende a 0 quando $n \to \infty$, concluímos que $d_H(\mathcal{F}^n(A), \mathcal{F}^n(B)) \to 0$ quando $n \to \infty$, ou seja, $\mathcal{F}$ é uma contração assintótica. Assim, pelo Teorema 12, existe um atrator $K \in \mathcal{K}(X)$, que é também um conjunto invariante. Como, pelo Lema 5, $\mathcal{F}$ é contínuo, então K é compacto. E isto conclui a demonstração do teorema. □

Corolário 1. *Seja* $(X, \|.\|)$ *um espaço de Banach e* d *sua métrica induzida. Se* ω *é um IFS fracamente hiperbólico em* (X, d), *então* $\mathcal{F}$ *tem um atrator* K *que é também um conjunto invariante compacto.*

Demonstração. Provaremos que $(\mathcal{K}(X), d_H)$ é $\epsilon-$encadeado para todo $\epsilon > 0$, e o resultado segue do teorema demonstrado acima.

Afirmamos que se $B \in \mathcal{K}(X)$, e $x \in X$, então existe uma função contínua $\psi_B : [0, 1] \to \mathcal{K}(X)$ tal que $\psi_B(0) = B$ e $\psi_B(1) = \{x\}$.

Para provar a afirmação, definimos a função $\phi : [0, 1] \times X \to X$ dada por $\phi(t, y) = tx + (1-t)y$ e a função parcial $\phi_t : X \to X$ dada por $\phi_t(z) = \phi(t, z)$.

Considere agora a função $\psi_B : [0, 1] \to \mathcal{K}(X)$, definida por

$$\psi_B(t) = \phi_t(B).$$

Observe que ϕ é contínua, e então como B é compacto, temos que $\psi_B(t)$ é compacto para todo $t \in [0, 1]$. Note, ainda, que $\psi_B(0) = B$ e $\psi_B(1) = \{x\}$. Resta então provar que ψ_B é contínua. De fato, pela continuidade da ϕ, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $|t_1 - t_2| < \delta$ então $d(\phi_{t_1}(b), \phi_{t_2}(b)) < \epsilon$, para cada $b \in B$. E portanto, se $|t_1 - t_2| < \delta$ então $d_H(\psi_B(t_1), \psi_B(t_2)) < \epsilon$, o que prova a continuidade de ψ_B. E isto finaliza a demonstração da afirmação.

Dados $A, B \in \mathcal{K}(X)$, podemos definir uma função contínua $\xi : [0,1] \to \mathcal{K}(X)$ tal que $\xi(0) = A$ e $\xi(1) = B$ como segue: fixe um ponto $x \in X$ satisfazendo a afirmação e defina

$$\xi(t) = \begin{cases} \psi_A(2t), & \text{se } \; t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \psi_B(2-2t), & \text{se } \; t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}.$$

Veja que

$$\begin{aligned} &\xi(0) = \psi_A(0) = A, \\ &\xi\left(\frac{1}{2}\right) = \psi_A(1) = \psi_B(1) = \{x\}, \\ &\xi(1) = \psi_B(0) = B. \end{aligned}$$

Assim,

$$d_H(A, B) = d_H(\xi(0), \xi(1)).$$

Mas como ξ é contínua, então existe uma sequência $t_0 = 0, t_1, \cdots, t_n = 1$ de pontos de $[0,1]$ tais que $d_H(\xi(t_i), \xi(t_{i+1})) < \epsilon$, ou seja, existe uma sequência $\xi(t_0) = A, \xi(t_1), \cdots, \xi(t_n) = B$ de elementos de $\mathcal{K}(X)$ tais que $d_H(\xi(t_i), \xi(t_{i+1})) < \epsilon$, para todo $i = 0, \cdots, n-1$. Portanto, existe uma $\epsilon-$cadeia que une A e B, para todo $\epsilon > 0$. Logo, pelo Teorema 14 concluímos que $\mathcal{F}$ tem um atrator K que é também um conjunto invariante compacto. $\square$

3.3 Demonstração do Teorema 15

Observe que, pelo Teorema 14, é garantida a existência de um atrator K, que é também um conjunto compacto invariante. Ou seja,

$$K = \mathcal{F}(K) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \omega_\lambda(K),$$

e daí, $\omega_\lambda(K) \subset K$, para cada $\lambda \in \Lambda$. Assim, $\omega|_K : \Lambda \times K \to K$ é um IFS fracamente hiperbólico, com K compacto.

Aplicando o Teorema 9 obtemos que $\omega|_K$ possui uma única medida invariante $\nu \in \mathcal{M}_1(K)$ e, além disso, se $p(U) > 0$ para todo $U \subset \Lambda$ aberto, então $\text{supp}(\nu) = K$.

Se $\nu \in \mathcal{M}_1(K)$ é tal que $\text{supp}(\nu) \subset K$, então da invariância de K temos $\text{supp}(T_p(\nu)) \subset K$ e portanto a função $T_p|_K : \mathcal{M}_1(K) \to \mathcal{M}_1(K)$ é bem definida. Logo, ν é a única medida invariante por $\omega|_K$ tal que $\operatorname{supp}(\nu) = K$. Agora iremos provar a última afirmação do teorema.

Queremos mostrar que $H(T_p^n(\mu), \nu) \to 0$, quando $n \to \infty$. Pelo Lema 8, para qualquer $a \in K, T_p^n(\delta_a) \to \nu$, quando $n \to \infty$ na topologia fraca* (e portanto, na métrica de Hutchinson), então é suficiente provar que

$$H(T_p^n(\mu), T_p^n(\delta_a)) \to 0, \quad \text{quando} \;\; n \to \infty.$$

De fato, d+ado $f \in Lip_1(X; \mathbb{R})$, de (2.8), temos

$$\int_X f \; dT_p^n(\mu) = \int_X \int_{\Lambda^n} f \circ \Gamma(\sigma, n, x) \; dp^n d\mu. \tag{3.4}$$

e de (2.6)

$$\int_X f \; dT_p^n(\delta_a) = \int_{\Lambda^n} f \circ \Gamma(\sigma, n, a) \; dp^n = \int_X \int_{\Lambda^n} f \circ \Gamma(\sigma, n, a) \; dp^n d\mu. \tag{3.5}$$

Esta última igualdade segue do fato de $\displaystyle\int_{\Lambda^n} f \circ \Gamma(\sigma, n, a) \; dp^n$ ser constante. Daí, de (3.4), (3.5), e usando que $f \in Lip_1(X; \mathbb{R})$, segue que

$$\begin{aligned} \left| \int_X f \; dT_p^n(\mu) - \int_X f \; dT_p^n(\delta_a) \right| &= \left| \int_X \int_{\Lambda^n} (f \circ \Gamma(\sigma, n, x) - f \circ \Gamma(\sigma, n, a)) \; dp^n d\mu \right| \\ &\leqslant \int_X \int_{\Lambda^n} |f \circ \Gamma(\sigma, n, x) - f \circ \Gamma(\sigma, n, a)| \; dp^n d\mu \\ &\leqslant \int_X \int_{\Lambda^n} d(\Gamma(\sigma, n, x), \Gamma(\sigma, n, a)) \; dp^n d\mu. \end{aligned}$$

Então

$$H(T_p^n(\mu), T_p^n(\delta_a)) \leqslant \int_X \xi_n \; d\mu, \tag{3.6}$$

onde $\xi_n = \displaystyle\int_{\Lambda^n} d(\Gamma(\sigma, n, x), \Gamma(\sigma, n, a)) \; dp^n$.

Agora, tome $r > 0$ tal que $\operatorname{supp}(\mu) \subset B(a, r)$. Então temos $\int_X \xi_n \; d\mu = \int_{B(a,r)} \xi_n \; d\mu$.

Afirmamos que $\xi_n \to 0$ uniformemente em $B(a, r)$. De fato, tome $\delta > 0$. Como temos, por hipótese, que X é uniformemente $\eta-$encadeado em $B(a, r)$, então existe um inteiro $k = k(a, r, \eta) > 0$ tal que para todo $x \in B(a, r)$ existe uma $\eta-$cadeia $x_0 = x, x_1, \cdots, x_k = a$, com no máximo $k + 1$ elementos. Pela hiperbolicidade fraca do IFS, existe $n_0 = n_0(\delta, k) > 0$ tal que $n \geqslant n_0$ implica em

$$d(\Gamma(\sigma, n, x), \Gamma(\sigma, n, y)) \leqslant \frac{\delta}{k},$$

para todo $\sigma \in \Omega$ e todos $x, y \in X$, com $d(x, y) < \eta$. Portanto, se $n \geqslant n_0$ obtemos

$$d(\Gamma(\sigma, n, x), \Gamma(\sigma, n, a)) \leqslant \sum_{j=0}^{k-1} d(\Gamma(\sigma, n, x_j), \Gamma(\sigma, n, x_{j+1})) \leqslant \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\delta}{k} = \delta,$$

para todo $\sigma \in \Omega$, e então

$$\xi_n = \int_{\Lambda^n} d(\Gamma(\sigma, n, x), \Gamma(\sigma, n, a)) \, dp^n < \delta,$$

para todo $x \in B(a, r)$. E isto conclui a prova da afirmação feita. Logo, pela afirmação e a desigualdade (3.6) concluímos que

$$H(T_p^n(\mu), T_p^n(\delta_a)) \to 0,$$

e isto finaliza a demonstração do teorema.

3.4 Demonstração do Teorema 16

Antes de iniciarmos a demonstração precisaremos de alguns lemas, que serão apresentados a seguir.

Lema 12. *Seja X um espaço métrico completo e $C \subset X$ compacto. Então X é próprio se, e somente se, $B(C, r)$ é compacto para todo $r > 0$.*

O próximo lema fornece algum controle (uniforme) para a velocidade de convergência das iteradas $\mathcal{F}^k(\{x\})$ para o atrator, mas apenas para pontos x próximos ao atrator. Este controle será um dos pontos principais para demonstrar o Teorema 16.

Lema 13. *Sejam $\omega : \Lambda \times X \to X$ um IFS contínuo, X um espaço métrico completo próprio e Λ um espaço de parâmetros compacto. Suponha que ω tem um atrator local A com bacia de atração local U. Então para qualquer $\epsilon > 0$ existe um inteiro $N = N(\epsilon)$ tal que para qualquer $x \in B(A, \epsilon) \cap U$ existe um inteiro $m = m(x, \epsilon) < N$ tal que*

$$d_H(A, \mathcal{F}^m(\{x\})) < \frac{\epsilon}{4}.$$

Demonstração. Assumimos, sem perda de generalidade, que $B(A, \epsilon) \subset U$. Se $x \in B(A, \epsilon)$, então como $\mathcal{F}^n(K) \to A$ para todo K compacto na bacia de atração, existe um inteiro $m = m(x, \epsilon)$ tal que

$$d_H(A, \mathcal{F}^m(\{x\})) < \frac{\epsilon}{8}.$$

Como $\mathcal{F}$ é um operador contínuo, existe $r_x > 0$ tal que para todo $y \in B(x, r_x)$ temos

$$d_H(\mathcal{F}^m(\{x\}), \mathcal{F}^m(\{y\})) < \frac{\epsilon}{8}.$$

Logo,

$$d_H(A, \mathcal{F}^m(\{y\})) \leqslant d_H(A, \mathcal{F}^m(\{x\})) + d_H(\mathcal{F}^m(\{x\}), \mathcal{F}^m(\{y\})) < \frac{\epsilon}{4},$$

para todo $y \in B(x, r_x)$. Como X é próprio, temos, pelo Lema 12, que $B(A, \epsilon)$ é compacto e então existe um conjunto finito $\{x_1, \cdots, x_n\}$ tal que

$$B(A, \epsilon) \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, r_{x_i}).$$

Seja $N = \max\{m(x_i, \epsilon); i = 1, \cdots, n\} + 1$. Então, para qualquer $x \in B(A, \epsilon)$, existe $i \in \{1, \cdots, n\}$ tal que $x \in B(x_i, r_{x_i})$ e portanto

$$d_H(A, \mathcal{F}^m(\{x\})) < \frac{\epsilon}{4},$$

com $m = m(x_i, \epsilon) < N$. Isto conclui a demonstração do lema. □

A seguir usaremos a continuidade do IFS ω para controlar órbitas de pontos próximos. O interessante é que isto pode ser feito uniformemente em $B(A, \epsilon)$ devido a compacidade.

Lema 14. *Sejam $\omega : \Lambda \times X \to X$ um IFS contínuo, X um espaço métrico completo próprio e Λ um espaço de parâmetros compacto. Suponha que ω tem um atrator A com bacia local de atração U. Para todo $\epsilon > 0$ e todo inteiro $N > 0$, existe $\delta = \delta(\epsilon, N)$ tal que para todo $m < N$, se $x \in B(A, \epsilon)$ e $d(\lambda_i, \sigma_i) < \delta$ em Λ, $i = 1, \cdots, m$, então*

$$d(\omega_{\lambda_m} \circ \cdots \circ \omega_{\lambda_1}(x), \omega_{\sigma_m} \circ \cdots \circ \omega_{\sigma_1}(x)) < \frac{\epsilon}{4}.$$

Demonstração. Fixe $\epsilon > 0$. A prova é feita por indução sobre N. Como $B(A, \epsilon)$ é compacto, o caso $N = 1$ segue da continuidade uniforme. Assim, suponha que o lema é válido para N e iremos provar que é válido também para $N + 1$. Novamente, como $Y = \cup_{n=0}^{N} \mathcal{F}^n(B(A, \epsilon))$ é um espaço métrico compacto, ω restrita a Y é uniformemente contínua. Consequentemente, existe $\delta_1 = \delta_1(\epsilon, N) > 0$ tal que se $\lambda_N, \sigma_N \in \Lambda$ e $a, b \in Y$, com $d(\lambda_N, \sigma_N) < \delta_1$ em Λ e $d(a, b) < \delta_1$ em Y, então

$$d(\omega_{\lambda_N}(a), \omega_{\sigma_N}(b)) < \epsilon.$$

Pela hipótese de indução, existe $\delta_2 = \delta_2(N, \epsilon)$ tal que se $d(\lambda_i, \sigma_i) < \delta_2$ para todo $i = 1, \cdots, N-1$, então

$$d(\omega_{\lambda_{N-1}} \circ \cdots \circ \omega_{\lambda_1}(x), \omega_{\sigma_{N-1}} \circ \cdots \circ \omega_{\sigma_1}(x)) < \delta_1.$$

Portanto, tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, se $d(\lambda_i, \sigma_i) < \delta$ para todo $i = 1, \cdots, N$, segue-se que

$$d(\omega_{\lambda_N} \circ \cdots \circ \omega_{\lambda_1}(x), \omega_{\sigma_N} \circ \cdots \circ \omega_{\sigma_1}(x)) < \epsilon.$$

Logo, o caso $N+1$ é válido. Isto conclui a demonstração do lema. □

O próximo lema reduz a demonstração do Teorema 16 para a demonstração de uma afirmação mais simples.

Lema 15. *Fixe um ponto $x \in X$. Suponha que a seguinte propriedade seja satisfeita.*

Para cada $\epsilon > 0$ existe $K_\epsilon > 0$ tal que para todo $L \geqslant K_\epsilon$ exista um conjunto $B_L \subset \Omega$ com $\mathbb{P}(B_L) = 1$, e tal que se $\sigma \in B_L$ e $x_k = \omega_k(x_{k-1})$ é a σ-órbita de x, então $d_H(A, (x_k)_{k \geqslant L}) < \epsilon$. Então existe $\mathcal{B} \subset \Omega \cap \mathcal{A}(x)$ com $\mathbb{P}(\mathcal{B}) = 1$.

Demonstração. Seja $\mathcal{B}_\epsilon = \cap_{L \geqslant K_\epsilon} B_L$. Como para cada $L \geqslant K_\epsilon$ temos $B_L \subset \Omega$, então $\mathcal{B}_\epsilon \subset \Omega$. Além disso, toda x-órbita $\{x_k = \omega_k(x_{k-1})\}$ gerada por alguma sequência $\sigma = (\sigma_k) \in \mathcal{B}_\epsilon$ satisfaz $d_H(A, (x_k)_{k \geqslant L}) < \epsilon$, para todo $L \geqslant K_\epsilon$. Agora, tomemos $\epsilon_n = \frac{1}{n}$ e defina $\mathcal{B} = \cap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_{\epsilon_n}$. Observe que $\mathbb{P}(\mathcal{B}) = \mathbb{P}(\cap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_{\epsilon_n}) = 1$ e $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}(x)$. De fato, tome $\sigma \in \mathcal{B}$ e considere (x_k) a órbita de x gerada por σ. Para qualquer $\epsilon > 0$ podemos tomar n suficientemente grande de modo que $\epsilon_n < \epsilon$. Como $\sigma \in \mathcal{B}_{\epsilon_n}$, temos que $L \geqslant K_{\epsilon_n}$ implica em $d_H(A, (x_k)_{k \geqslant L}) < \epsilon_n < \epsilon$. Logo, $A = \lim_{L \to \infty} (x_k)_{k \geqslant L}$, o que prova que $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}(x)$.

Isto conclui a demonstração do lema. □

Agora iniciaremos de fato a demonstração do Teorema 16

Demonstração do Teorema 16. Iremos aplicar o Lema 15. Fixemos $\epsilon > 0$. Pela definição do atrator, existe K_ϵ tal que $k \geqslant K_\epsilon$ implica que

$$d_H(\mathcal{F}^k(\{x\}), A) < \epsilon,$$

em particular, dada qualquer sequência $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \Omega$, a órbita correspondente satisfaz

$$x_k \in \mathcal{F}^k(\{x\}) \subset B(A, \epsilon),$$

para todo $k \geqslant K_\epsilon$. Tome $L \geqslant K_\epsilon$ e considere o conjunto B_L.

Considere um conjunto $\{a_1, \cdots, a_l\} \subset A$ tal que $A \subset \cup_{j=1}^{l} B(a_j, \frac{\epsilon}{4})$. Observe que se um conjunto $R \subset B(A, \epsilon)$ tem interseção não vazia com toda bola $B(a_j, \frac{\epsilon}{4})$ então $d_H(A, R) < \epsilon$. Em virtude disto, dizemos que uma palavra finita $\{\sigma_1, \cdots, \sigma_n\} \subset \Lambda$ *corrige* um ponto a se existem $n_1, \cdots, n_l \subset \{1, \cdots, n\}$ tais que

$$\omega_{\sigma_{n_j}} \circ \cdots \circ \omega_{\sigma_{n_1}}(a) \in B\left(a_j, \frac{\epsilon}{2}\right), \text{ para cada } j.$$

Agora, observe que o Lema 13 implica que para cada $a \in B(A, \epsilon)$ existe uma palavra finita $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ tal que

$$\omega_{\lambda_m} \circ \cdots \circ \omega_{\lambda_1}(a) \in B\left(a_1, \frac{\epsilon}{4}\right),$$

e o comprimento m desta palavra é limitado por $N = N(\epsilon)$. Aplicando o mesmo raciocínio com $\omega_{\lambda_m} \circ \cdots \circ \omega_{\lambda_1}(a)$ no lugar de a, encontramos uma segunda palavra finita, com a mesma constante de limitação para seu comprimento, então a órbita de a sob esses dois blocos de palavras agora visita ambas as bolas $B(a_1, \frac{\epsilon}{4})$ e $B(a_2, \frac{\epsilon}{4})$. Continuando desta maneira, podemos encontrar uma palavra finita com comprimento no máximo lN visitando todas as bolas $B(a_j, \frac{\epsilon}{4})$.

Pelo Lema 14, existe $\delta = \delta(\epsilon, N)$ tal que para toda palavra finita com o mesmo comprimento da palavra encontrada anteriormente com uma distância δ desta, a órbita correspondente também visita todas as bolas $B(a_j, \frac{\epsilon}{4})$.

Como p é uma medida justa, pela Definição 29 temos que a $\mathbb{P}$—medida do conjunto

$$C_0 = \{\sigma \in \Omega; \sigma_{L+1}, \cdots, \sigma_{L+lN} \text{ corrige } x_L\}$$

é pelo menos $f(\delta)^{lN}$. Pela mesma razão, a medida de cada conjunto

$$C_j = \{\sigma \in \Omega; \sigma_{L+jlN+1}, \cdots, \sigma_{L+(j+1)lN} \text{ corrige } x_{L+jlN}\}$$

é pelo menos $f(\delta)^{lN}$. Além disso, como estes conjuntos são independentes, segue-se que

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j=0}^{\infty}(\Omega - C_j)\right) \leqslant \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=0}^{t-1}(\Omega - C_j)\right) \leqslant (1 - f(\delta)^{lN})^t.$$

Portanto, $\mathbb{P}(\cup_{j\in\mathbb{N}} C_j) = 1$.

Pela construção dos conjuntos C_j, para toda $\sigma \in \cup_{j\in\mathbb{N}} C_j$ a órbita correspondente satisfaz

$$A \subset B((x_k)_{k\geqslant L}, \epsilon),$$

e como $L \geqslant K_\epsilon$, também obtemos que $(x_k)_{k \geqslant L} \subset B(A, \epsilon)$. Logo

$$d_H(A, (x_k)_{k \geqslant L}) < \epsilon.$$

Assim, colocando $B_L = \cup_{j \in \mathbb{N}} C_j$ e usando o Lema 15, concluímos o resultado. $\square$

Capítulo 4

Apêndice

Aqui iremos apresentar e demonstrar o Teorema Ergódico de Birkhoff, resultado que será bastante útil para a prova do Teorema 10. Para isto, veremos alguns resultados antes.

Teorema 18 (Teorema Ergódico Maximal)**.** *Seja* $f : X \to X$ *uma transformação mensurável e* μ *uma probabilidade invariante por* f*. Dada qualquer função integrável* $\varphi : X \to \mathbb{R}$ *e sendo* $\varphi^*(x) = \sup_{n \geqslant 1} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x))$, *temos*

$$\int_D \varphi \; d\mu \geqslant 0,$$

onde $D = \{x \in X; \varphi^*(x) > 0\}$.

Antes de iniciarmos a demonstração deste teorema, apresentamos um lema que será útil em nossa demonstração.

Lema 16. *Seja* $U : L^1(\mu) \to L^1(\mu)$ *um operador linear positivo satisfazendo* $\|U\|_1 \leqslant 1$. *Dado um natural* $N > 0$ *e* $\varphi \in L^1(\mu)$ *defina*

$$\varphi_0 = 0, \varphi_1 = \varphi, \cdots, \varphi_n = \sum_{j=0}^{n-1} U^j \varphi, \; 1 \leqslant n \leqslant N, \quad e \;\; \psi_N = \max_{0 \leqslant i \leqslant N} \varphi_i.$$

Então

$$\int_{A_N} \varphi \; d\mu \geqslant 0,$$

onde $A_N = \{x \in X; \; \psi_N(x) > 0\}$.

Demonstração. Sejam $f, g \in L^1(\mu)$ com $f(x) \geqslant g(x)$, para todo $x \in X$. Como U é um operador linear positivo, então $Uf(x) \geqslant Ug(x)$ para todo $x \in X$.

Observe que $\psi_N \geqslant 0$ para qualquer $N \in \mathbb{N}$ e além disso, $\psi_N \in L^1(\mu)$.

Dado $0 \leqslant k \leqslant N-1$, temos

$$\psi_N \geqslant \varphi_k \Rightarrow U\psi_N \geqslant U\varphi_k \Rightarrow U\psi_N + \varphi \geqslant \varphi + U\varphi_k.$$

Note que

$$\varphi + U\varphi_k = \varphi + U(\sum_{j=0}^{k-1} U^j\varphi) = \varphi + \sum_{j=1}^{k} U^j\varphi = \varphi + \sum_{j=0}^{k} U^j\varphi = \varphi_{k+1}.$$

Ou seja, para cada k com $0 \leqslant k \leqslant N-1$, temos $U\psi_N + \varphi \geqslant \varphi_{k+1}$, e então

$$U\psi_N + \varphi \geqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant N} \varphi_i. \tag{4.1}$$

Segue-se a partir de (4.1) que para $x \in A_N = \{x \in X; \psi_N(x) > 0\}$, temos

$$0 < \psi_N(x) = \max_{0 \leqslant i \leqslant N} \varphi_i(x) = \max\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \cdots, \varphi_N(x)\} = \max\{0, \varphi_1(x), \cdots, \varphi_N(x)\}.$$

Assim, como $\max\{0, \varphi_1(x), \cdots, \varphi_N(x)\} > 0$ temos

$$\max\{\varphi_1(x), \cdots, \varphi_N(x)\} = \max\{0, \varphi_1(x), \cdots, \varphi_N(x)\} > 0 \Rightarrow \max_{1 \leqslant i \leqslant N} \varphi_i > 0.$$

Portanto,

$$U\psi_N + \varphi \geqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant N} \varphi_i > 0 \ \text{ em } \ A_N.$$

Como $U\psi_N + \varphi, \psi_N \in L^1(\mu)$ e A_N é o conjunto dos pontos que ψ_N é positiva, segue que

$$\int_{A_N} U\psi_N + \varphi \; d\mu \geqslant \int_{A_N} \psi_N \; d\mu$$
$$\Rightarrow \int_{A_N} \varphi \; d\mu \geqslant \int_{A_N} \psi_N \; d\mu - \int_{A_N} U\psi_N \; d\mu$$

Como $\psi_N = 0$ em $X \backslash A_N$, então

$$\int_{A_N} \psi_N \; d\mu = \int_X \psi_N \; d\mu.$$

Em particular, $\psi_N \geqslant 0$ e portanto $U\psi_N \geqslant 0$. Daí,

$$\int_{A_N} \varphi \; d\mu \geqslant \int_{A_N} \psi_N \; d\mu - \int_{A_N} U\psi_N \; d\mu \geqslant \int_X \psi_N \; d\mu - \int_X U\psi_N \; d\mu. \tag{4.2}$$

Por hipótese, $||U||_1 \leqslant 1$, então

$$\int_X |U\psi_N| \; d\mu \leqslant \int_X |\psi_N| \; d\mu,$$

e isto implica em

$$\int_X U\psi_N \; d\mu \leqslant \int_X \psi_N \; d\mu,$$

uma vez que $\psi_N \geqslant 0 \Rightarrow U\psi_N \geqslant 0$ e, consequentemente, $|\psi_N| = \psi_N$ e $|U\psi_N| = U\psi_N$. Da desigualdade acima, segue que

$$\int_X \psi_N \; d\mu - \int_X U\psi_N \; d\mu \geqslant 0,$$

donde, substituindo em (4.2), obtemos

$$\int_{A_N} \varphi \; d\mu \geqslant 0.$$

Isto conclui a demonstração do lema. □

Demonstração do Teorema 18. Considere $U_f : L^1(\mu) \to L^1(\mu)$ o operador de Koopman, isto é, $U_f(\varphi) = \varphi \circ f$. Então,

$$\int_X |U_f(\varphi)| d\mu = \int_X |\varphi \circ f| d\mu = \int_X |\varphi| \circ f \; d\mu = \int_X |\varphi| d(f_*\mu) = \int_X |\varphi| \; d\mu.$$

Ou seja, $||U_f(\varphi)||_{L^1} = ||\varphi||_{L^1}$.

Se $\psi : X \to \mathbb{R}$ é uma outra função integrável tal que $\varphi(x) \geqslant \psi(x)$ para todo $x \in X$, então

$$U_f(\varphi)(x) = \varphi(f(x)) \geqslant \psi(f(x)) = U_f(\psi)(x),$$

logo, U_f é um operador linear positivo com $||U_f|| \leqslant 1$.

Sejam φ_n, ψ_N e A_N como no Lema 16. Afirmamos que $D = \bigcup_{j \geqslant 1} A_j$.

De fato, se $x \in D$, temos $\varphi^*(x) > 0$, ou seja,

$$\sup_{n \geqslant 1} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x)) > 0 \Rightarrow \sup_{n \geqslant 1} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} U_f^j(\varphi)(x) > 0.$$

Pela definição de supremo, dado ϵ suficientemente pequeno, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{n_0} \sum_{j=0}^{n_0-1} U_f(\varphi)(x) > \sup_{n \geqslant 1} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} U_f^j(\varphi)(x) - \epsilon > 0.$$

Consequentemente,

$$
\begin{aligned}
\max_{1\leqslant i\leqslant n_0} \frac{1}{i}\sum_{j=0}^{i-1} U_f(\varphi)(x) > 0 \Rightarrow & \max_{1\leqslant i\leqslant n_0} \varphi_i(x) > 0 \\
\Rightarrow & \max_{0\leqslant i\leqslant n_0} \varphi_i(x) > 0 \\
\Rightarrow & \psi_{n_0}(x) > 0 \\
\Rightarrow & x \in A_{n_0} \\
\Rightarrow & x \in \bigcup_{j\geqslant 1} A_j.
\end{aligned}
$$

Reciprocamente, dado $x \in \bigcup_{j\geqslant 1} A_j$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$
\begin{aligned}
x \in A_{n_1} \Rightarrow & \psi_{n_1}(x) > 0 \\
\Rightarrow & \max_{0\leqslant i\leqslant n_1} \varphi_i(x) > 0 \\
\Rightarrow & \max_{1\leqslant i\leqslant n_1} \varphi_i(x) > 0 \\
\Rightarrow & \max_{1\leqslant i\leqslant n_1} \frac{1}{i}\sum_{j=0}^{i-1} U_f^j(\varphi)(x) > 0 \\
\Rightarrow & \max_{1\leqslant i\leqslant n_1} \frac{1}{i}\sum_{j=0}^{i-1} \varphi(f^j(x)) > 0 \\
\Rightarrow & \sup_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x)) > 0 \\
\Rightarrow & \varphi^*(x) > 0 \\
\Rightarrow & x \in D.
\end{aligned}
$$

Logo, $D = \bigcup_{j\geqslant 1} A_j$, e isto prova a afirmação feita.

Agora, observe que se $x \in A_n$, temos

$$\psi_n(x) > 0 \Rightarrow \max_{0\leqslant i\leqslant n} \varphi_i > 0 \Rightarrow \max_{0\leqslant i\leqslant n+1} \varphi_i > 0 \Rightarrow \psi_{n+1}(x) > 0 \Rightarrow x \in A_{n+1}.$$

Assim, $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$. Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada e pelo Lema 16, segue que

$$\int_D \varphi \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{A_n} \varphi \, d\mu \geqslant 0.$$

Isto conclui a demonstração do teorema. $\square$

Corolário 2. *Considere uma transformação* $f : X \to X$, $\varphi \in L^1(\mu), \alpha \in \mathbb{R}$ *e* $\varphi^*(x) = \sup_{n \geqslant 1} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x))$. *Então*

$$\int_{D_\alpha} \varphi \, d\mu \geqslant \alpha\mu(D_\alpha),$$

onde $D_\alpha = \{x \in X; \varphi^*(x) > \alpha\}$.

Demonstração. Defina $\psi(x) = \varphi(x) - \alpha$. Então

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \psi(f^j(x)) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} (\varphi(f^j(x)) - \alpha).$$

Observe que $\psi^*(x) = \varphi^*(x) - \alpha$ e defina $A = \{x \in X; \psi^*(x) > 0\}$. Daí,

$$\int_A \psi \, d\mu = \int_{D_\alpha} \varphi - \alpha \, d\mu = \int_{D_\alpha} \varphi \, d\mu - \alpha\mu(D_\alpha).$$

Por outro lado, pelo Teorema Ergódico Maximal, temos $\int_A \psi \, d\mu \geqslant 0$.

Logo,

$$\int_{D_\alpha} \varphi \, d\mu \geqslant \alpha\mu(D_\alpha).$$

Isto conclui a demonstração do corolário. □

Teorema 19 (Teorema Ergódico de Birkhoff). *Seja* $f : X \to X$ *uma transformação mensurável e seja* μ *uma probabilidade invariante por* f. *Dada qualquer função integrável* $\varphi : X \to \mathbb{R}$, *o limite*

$$\widetilde{\varphi}(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x))$$

existe em μ*-q.t.p* $x \in X$. *Além disso, a função* $\widetilde{\varphi}$ *definida desta forma é integrável e satisfaz*

$$\int \widetilde{\varphi}(x) \quad d\mu(x) = \int \varphi(x) \quad d\mu(x).$$

Demonstração. Sejam

$$\varphi_1(x) = \liminf \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x))$$

e

$$\varphi_2(x) = \limsup \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x)).$$

Obviamente $\varphi_1 \leqslant \varphi_2$. Nosso intuito é mostrar que $\varphi_1 = \varphi_2$ em μ-q.t.p. $x \in X$. Considere então $E_{\alpha,\beta} = \{x \in X; \varphi_1(x) < \alpha < \beta < \varphi_2(x)\}$, daí, temos que $\bigcup_{\alpha,\beta \in \mathbb{Q}} E_{\alpha,\beta} = \{x \in X; \varphi_1(x) < \varphi_2(x)\}$.

Note que $E_{\alpha,\beta}$ é invariante. De fato, observe que

$$\begin{aligned}
\varphi_2(f(x)) &= \limsup \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\varphi(f^j(f(x))) \\
&= \limsup \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\varphi(f^j(x)) \\
&= \limsup \frac{1}{n}\left(\sum_{j=0}^{n}\varphi(f^j(x)) + \varphi(x)\right) \\
&= \limsup \left(\frac{n+1}{n}\cdot\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}\varphi(f^j(x)) + \frac{\varphi(x)}{n}\right) \\
&= \limsup \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}\varphi(f^j(x)) \\
&= \varphi_2(x),
\end{aligned}$$

como queríamos. O mesmo vale para φ_1.

Afirmamos que $\mu(E_{\alpha,\beta}) = 0$. De fato, seja $f : E_{\alpha,\beta} \to E_{\alpha,\beta}$ a restrição de f ao conjunto invariante $E_{\alpha,\beta}$ e $\varphi : E_{\alpha,\beta} \to \mathbb{R}$ a restrição da função integrável φ ao conjunto $E_{\alpha,\beta}$.

Da definição de $E_{\alpha,\beta}$, temos

$$\beta < \varphi_2(x) \Rightarrow \sup \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\varphi(f^j(x)) > \beta \Rightarrow \varphi^*(x) > \beta.$$

Daí, aplicando o corolário anterior, obtemos

$$\int_{D_\beta} \varphi \; d\mu \geqslant \beta\mu(D_\beta),$$

onde $D_\beta = \{x \in E_{\alpha,\beta}; \varphi^*(x) > \beta\} = E_{\alpha,\beta}$. Ou seja,

$$\int_{E_{\alpha,\beta}} \varphi \; d\mu \geqslant \beta\mu(E_{\alpha,\beta}). \tag{4.3}$$

Note ainda que

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x) < \alpha &\Rightarrow \inf \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\varphi(f^j(x)) < \alpha \\
&\Rightarrow -\inf \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\varphi(f^j(x)) > -\alpha \\
&\Rightarrow \sup \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}-\varphi(f^j(x)) > -\alpha \\
&\Rightarrow (-\varphi)^* > -\alpha.
\end{aligned}$$

Novamente pelo corolário anterior,

$$\begin{aligned}
&\int_{D_{-\alpha}} -\varphi \ d\mu \geqslant -\alpha\mu(D_{-\alpha}) \\
\Rightarrow &\int_{E_{\alpha,\beta}} -\varphi \ d\mu \geqslant -\alpha\mu(E_{\alpha,\beta}) \\
\Rightarrow &\int_{E_{\alpha,\beta}} \varphi \ d\mu \leqslant \alpha\mu(E_{\alpha,\beta}), \qquad (4.4)
\end{aligned}$$

onde $D_{-\alpha} = \{x \in E_{\alpha,\beta}; (-\varphi)^* > -\alpha\}$.

Portanto, de (4.3) e (4.4), temos que

$$\beta\mu(E_{\alpha,\beta}) \leqslant \alpha\mu(E_{\alpha,\beta}).$$

Como $\alpha < \beta$, segue que $\mu(E_{\alpha,\beta}) = 0$.

Portanto, isso mostra que existe o limite

$$\widetilde{\varphi}(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x)),$$

pois $\mu\left(\bigcup_{\alpha,\beta\in\mathbb{Q}} E_{\alpha,\beta}\right) = 0$.

Agora queremos mostrar que $\widetilde{\varphi}$ é integrável, ou seja, que $\int_X |\widetilde{\varphi}| d\mu < \infty$. Para tanto, note que

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x))\right| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} |\varphi|(f^j(x)).$$

Daí,

$$\int_X |\widetilde{\varphi}| d\mu = \int_X \liminf \left|\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x))\right| d\mu.$$

Pelo Lema de Fatou,

$$\begin{aligned}
\int_X \liminf \left|\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x))\right| d\mu &\leqslant \liminf \int_X \left|\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x))\right| d\mu \\
&\leqslant \liminf \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \int_X |\varphi| \circ f^j \ d\mu \\
&= |\varphi_1| \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Portanto, $\widetilde{\varphi}$ é integrável.

Para finalizar a demonstração do teorema, resta mostrar que $\int_X \widetilde{\varphi}(x) d\mu(x) = \int_X \varphi(x) \ d\mu(x)$.

Considere os conjuntos

$$A_{n,k} = \left\{ x \in X; \frac{k}{2^n} \leqslant \widetilde{\varphi}(x) \leqslant \frac{k+1}{2^n} \right\} \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N} \text{ e } k \in \mathbb{Z}.$$

Observe que

$$\frac{k}{2^n}\mu(A_{n,k}) \leqslant \int_{A_{n,k}} \widetilde{\varphi} d\mu \leqslant \frac{k+1}{2^n}\mu(A_{n,k}). \tag{4.5}$$

Considere agora a restrição das funções f e φ ao conjunto $A_{n,k}$. Obviamente, $\varphi : A_{n,k} \to \mathbb{R}$ está bem definida. Mostremos que que $f : A_{n,k} \to A_{n,k}$ também está bem definida. Dado $x \in A_{n,k}$, queremos mostrar que $f(x) \in A_{n,k}$.

De fato,

$$\begin{aligned}
\widetilde{\varphi}(f(x)) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(f(x))) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^{j+1}(x)) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \varphi(f^j(x)) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^{n} \varphi(f^j(x)) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{n+1} \left(\sum_{j=0}^{n} \varphi(f^j(x)) - \varphi(x) \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} \varphi(f^j(x)) - \lim_{n\to\infty} \frac{\varphi(x)}{n} \\
&= \widetilde{\varphi}(x)
\end{aligned}$$

Ou seja, $\widetilde{\varphi}(f(x)) = \widetilde{\varphi}(x)$ e, portanto, $f(x) \in A_{n,k}$, o que implica que $f : A_{n,k} \to A_{n,k}$ está bem definida.

Dado $\epsilon > 0$, se $x \in A_{n,k}$, então $\widetilde{\varphi}(x) \geqslant \dfrac{k}{2^n} > \dfrac{k}{2^n} - \epsilon$.

Pelo Corolário 2,

$$\int_{\{x \in A_{n,k}; \widetilde{\varphi}(x) > \frac{k}{2^n} - \epsilon\}} \varphi \ d\mu = \int_{A_{n,k}} \varphi \ d\mu \geqslant \left(\frac{k}{2^n} - \epsilon \right) \mu(A_{n,k}).$$

Fazendo $\epsilon \to 0$, obtemos

$$\int_{A_{n,k}} \varphi \ d\mu \geqslant \frac{k}{2^n}\mu(A_{n,k}). \tag{4.6}$$

Analogamente,

$$\int_{\{x\in A_{n,k};\widetilde{(-\varphi)}(x)>-\frac{k+1}{2^n}\}} -\varphi \; d\mu = \int_{A_{n,k}} -\varphi \; d\mu \geqslant \left(-\frac{k+1}{2^n}\right)\mu(A_{n,k}),$$

ou seja,

$$\int_{A_{n,k}} \varphi \; d\mu \leqslant \frac{k+1}{2^n}\mu(A_{n,k}). \tag{4.7}$$

De (4.6) e (4.7) obtemos que

$$\frac{k}{2^n}\mu(A_{n,k}) \leqslant \int_{A_{n,k}} \varphi \; d\mu \leqslant \frac{k+1}{2^n}\mu(A_{n,k}). \tag{4.8}$$

Note que, fixado n, o espaço X pode ser escrito como a união disjunta $X = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} A_{n,k}$. Assim,

$$\begin{aligned}
\left|\int_X \widetilde{\varphi} d\mu - \int_X \varphi \; d\mu\right| &= \left|\int_{\cup A_{n,k}} \widetilde{\varphi} d\mu - \int_{\cup A_{n,k}} \varphi \; d\mu\right| \\
&= \left|\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{A_{n,k}} \widetilde{\varphi} d\mu - \sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{A_{n,k}} \varphi \; d\mu\right| \\
&= \left|\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(\int_{A_{n,k}} \widetilde{\varphi} d\mu - \int_{A_{n,k}} \varphi \; d\mu\right)\right| \\
&\leqslant \sum_{k\in\mathbb{Z}}\left|\int_{A_{n,k}} \widetilde{\varphi} d\mu - \int_{A_{n,k}} \varphi \; d\mu\right|.
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Multiplicando (4.8) por -1 e somando com (4.5), obtemos

$$\frac{k}{2^n}\mu(A_{n,k}) - \frac{k+1}{2^n}\mu(A_{n,k}) \leqslant \int_{A_{n,k}} \widetilde{\varphi} d\mu - \int_{A_{n,k}} \varphi \; d\mu \leqslant \frac{k+1}{2^n}\mu(A_{n,k}) - \frac{k}{2^n}\mu(A_{n,k}).$$

Daí,

$$\left|\int_{A_{n,k}} \widetilde{\varphi} d\mu - \int_{A_{n,k}} \varphi \; d\mu\right| \leqslant \frac{1}{2^n}\mu(A_{n,k}).$$

Passando ao somatório ambos os membros da desigualdade, encontramos a seguinte estimativa:

$$\begin{aligned}
\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left|\int_{A_{n,k}} \widetilde{\varphi} d\mu - \int_{A_{n,k}} \varphi \; d\mu\right| &\leqslant \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2^n}\mu(A_{n,k}) \\
&= \frac{1}{2^n}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\mu(A_{n,k}) \\
&= \frac{1}{2^n}\mu(X).
\end{aligned}$$

Substituindo a desigualdade acima em (4.9), segue que

$$\left|\int_X \widetilde{\varphi} d\mu - \int_X \varphi \ d\mu\right| \leqslant \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\int_{A_{n,k}} \widetilde{\varphi} d\mu - \int_{A_{n,k}} \varphi \ d\mu\right| \leqslant \frac{1}{2^n}\mu(X).$$

Fazendo $n \to \infty$, concluímos que

$$\int_X \widetilde{\varphi} d\mu = \int_X \varphi \ d\mu.$$

Como queríamos mostrar. Isto encerra a demonstração do teorema. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] Arbieto, A., Junqueira, A., Santiago, B.: On weakly hyperbolic iterated functions systems. Bull. Braz. Math. 401 Soc, New Series (2016)

[2] Barnsley, M.F.: Fractal image compression. Notices Am. Math. Soc. 43(6), 657-662 (1996)

[3] Castro Jr., A. A. Curso de teoria da medida. 3.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2015.

[4] Hutchinson, J.E.: Fractals and self-similarity. Indiana Univ. Math. J. 30, 713-747 (1981)

[5] Jachymski, J.R.: An iff fixed point criterion for continuous self-mappings on a complete metric space. Aequat. Math. 48, 163-170 (1994)

[6] Kravchenko, A.S.: Completeness of the space of separable measures in the Kantorovich-Rubinshtein metric. Siberian Math. J. 47(1), 68-76 (2006)

[7] Lima, E. L. Espaços Métricos. 5.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2017.

[8] Máté, L.: The Hutchinson-Barnsley theory for certain non-contraction mappings. Period. Math. Hungar. 27, 21-33 (1993)

[9] Viana, M.; Oliveira, K. Fundamentos da Teoria Ergódica. 2.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2019.

[10] Walters, P.: An Introduction to Ergodic Theory, Graduate Texts in Mathematics, vol. 79. Springer, New York (1982)

[11] Williams, R.F.: Composition of contractions. Bol. Soc. Brasil. Mat. 2(2), 55-59 (1971)