

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO EM MATEMÁTICA

**O problema de Cauchy para a equação de Zakharov -
Kuznetsov generalizada.**

Teresina - 2019

Ronnyê Paz de Lima

Dissertação de Mestrado:

**O problema de Cauchy para a equação de Zakharov - Kuznetsov
generalizada.**

Dissertação submetida à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:

Prof. Dr. Gleison do Nascimento Santos

Co-Orientador:

Prof. Dr. Roger Peres de Moura

Teresina - 2019

FICHA CATALOGRÁFICA
Serviço de Processamento Técnico da Universidade Federal do Piauí
Biblioteca Setorial do CCN

L732p Lima, Ronnyê Paz de.
O problema de Cauchy para a equação de Zakharov-Kuznetsov generalizada / Ronnyê Paz de Lima. – Teresina, 2019.
56 f.: il. color.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Piauí, Centro de Ciências da Natureza, Pós-Graduação em Matemática, 2019.
Orientador: Prof. Dr. Gleison do Nascimento Sousa
Co-orientador: Prof. Dr. Roger Peres de Moura

1. Análise. 2. Equação de Zakharov-Kuznetsov. 3. Problema de Valor Inicial - PVI I. Título.

CDD 515.14

Bibliotecária : Caryne Maria da Silva Gomes / CRB3-1461



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

O problema de Cauchy para a equação de Zahkarov-Kuznetsov generalizada

Ronnyê Paz de Lima

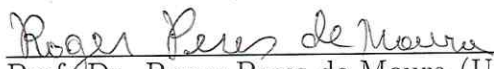
Esta Dissertação foi submetida como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de **Mestre em Matemática**, outorgado pela Universidade Federal do Piauí.

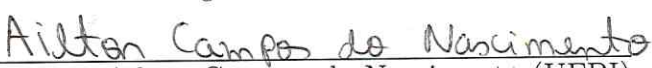
A citação de qualquer trecho deste trabalho é permitida, desde que seja feita em conformidade com as normas da ética científica.

Dissertação aprovada em 28 de Fevereiro de 2019.

Banca Examinadora:


Prof. Dr. Gleison do Nascimento Santos - Orientador


Prof. Dr. Roger Peres de Moura (UFPI)


Prof. Dr. Ailton Campos do Nascimento (UFPI)

Luciano Sousa Ramos. (In memoriam).

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, pela Sua infinita misericórdia, bondade e amor, pois sem Ele não estaria conquistando mais essa realização na minha vida.

Agradeço a minha mãe Maria dos Remédios Oliveira Paz de Lima e ao meu pai Benedito Sudário de Lima pelo sacrifício feito para me proporcionar a excelente educação que tive, me levando até este momento, além disso, eles estavam sempre me apoiando, me dando forças para que eu não desistisse. Agradeço a minha irmã Vanessa Maria Paz de Lima, aos meus irmãos Robson Paz de Lima e Roger Paz de Lima. Agradeço ainda aos demais familiares que fizeram parte desta conquista.

Agradeço a minha esposa Jaine Magalhães Silva por sempre estar ao meu lado me apoiando, me dando força para que assim nunca desistisse, me motivando, dizendo que sou capaz. Eu sou muito grato a ela por isso. Eu te amo, Jaine Magalhães Silva.

Agradeço ao meu orientador Dr. Gleison do Nascimento Santos e meu coorientador Dr. Roger Moura Peres por me prepararem pra esse momento e por serem sempre pacientes comigo, sem a ajuda deles eu não teria chegado até aqui.

Agradeço aos meus amigos de graduação Gean Nunes, Marisa Lemos, Filipe Bruno, Débora Alvares, Fellype Eduardo, Whids, Ytalo Yandro, Rubens Sampaio, João Vitor, Maxwell. Agradeço ainda aos demais amigos de graduação que tive a oportunidade de conviver nesse período.

Agradeço aos meus amigos de estudos por compartilharem conhecimento, risadas e aquela coca-cola bem gelada na hora do almoço, que esse laço se torne a cada dia mais forte, que sejamos como irmãos. Marcos Paulo, Lucas Emmanuel, Thyago Mayson, Edmilson Lopes, Luân Soares, Lucas Cassiano, Josimauro Borges, Arilson Cruz, Leonardo Nascimento, José Edilson, Oliveiro, Nadiel Cícero, Pablo Rêgo, Hyon Cordeiro, Rafaelber de Carvalho,

Ydenilson Almeida, Valéria Sousa, Juliana Gomes, Kelvin Jonhoson.

Agradeço aos membros da banca por fazerem parte desse momento, em especial o Prof. Dr. Ailton Campos do Nascimento.

Agradeço aos professores do Departamento de Matemática da Ufpi, pois eles foram a base para tudo isso ocorrer.

Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.

“Determinação, coragem e auto-confiança são fatores decisivos para o sucesso. Se estamos possuídos por uma inabalável determinação, conseguiremos superá-los. Independentemente das circunstâncias, devemos ser sempre humildes, recatados e despidos de orgulho”.

Dalai Lama.

Resumo

Neste trabalho estudaremos o problema de valor inicial (PVI) associado à equação de Zakharov - Kuznetsov generalizada (gZK).

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x \Delta u + u^k \partial_x u = 0, & (\bar{x}, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \\ u(\bar{x}, 0) = u_0(\bar{x}). \end{cases} \quad (1)$$

Uma questão primordial no estudo de (1) é o problema de boa colocação que consiste em saber se a cada condição inicial u_0 dada é possível encontrar uma, e somente uma solução de (1) e que além disso tais soluções dependam continuamente dos dados iniciais. Provaremos que o PVI (1) é bem posto para dados iniciais em espaços de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^3)$ com índices $s > \frac{3}{2} - \frac{2}{k}$, para todo $k \geq 4$. A técnica que empregamos para obter tal resultado consiste em transformar o PVI (1) em uma equação integral, cujas soluções são pontos fixos de um certo operador (operador integral associado). Para construir um espaço de Banach onde o operador integral é uma contração, nos valem de várias estimativas para as soluções da parte linear da equação tais como efeitos suavizantes, estimativas da função maximal, imersões de Sobolev.

Palavras - chaves:

Boa colocação, Equação de Zakharov - Kuznetsov generalizada, o problema de Cauchy equação de Zakharov - Kuznetsov generalizada.

Abstract

In this work we will study the initial value problem (IVP) associated with the generalized Zakharov - Kuznetsov equation (gZK).

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x \Delta u + u^k \partial_x u = 0, & (\bar{x}, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \\ u(\bar{x}, 0) = u_0(\bar{x}). \end{cases}$$

A prime issue in the study of [\(1\)](#) is the problem of well-posedness which consists of knowing if for each given initial condition u_0 given, it can find one and only one solution of [\(1\)](#), besides that, such solutions depend continuously on the initial data. We will prove that the IVP [\(1\)](#) is well posed for initial data in Sobolev spaces $H^s(\mathbb{R}^3)$ with indices $s > \frac{3}{2} - \frac{2}{k}$, for all $k \geq 4$. The technique used to obtain such result is to transform IVP [\(1\)](#) into an integral equation, whose solutions are fixed points of a certain operator (associated integral operator). In order to construct a Banach space where the integral operator is a contraction, we use several estimates for the solutions of the linear part of the equation such as smoothing effects, maximal estimates and Sobolev embeddings.

Keywords:

Well-posedness, Generalized Zakharov-Kuznetsov equation, the Cauchy problem of the generalized Zakharov-Kuznetsov equation.

Sumário

Resumo	v
Abstract	vi
1 Noções Preliminares	5
1.1 Espaços de Lebesgue L^p	5
1.2 Espaços de Lebesgue misto	7
1.3 A transformada de Fourier	8
1.3.1 A transformada de Fourier em $L^1(\mathbb{R}^n)$	8
1.3.2 A transformada de Fourier no Espaço de Schwartz	9
1.3.3 A transformada de Fourier em $L^p(\mathbb{R}^n)$ com $1 < p \leq 2$	10
1.3.4 A transformada de Fourier de uma distribuição	10
1.4 Espaços de Sobolev	12
1.5 Decomposição de Littlewood - Paley	13
2 O grupo associado a equação Zakharov-Kuznetsov	19
2.1 Teoria linear	19
2.2 Algumas estimativas lineares	21
3 Boa colocação local	23
3.1 Estimativas em X_T	24
3.2 Boa colocação em H^s com $s > s_k = \frac{3}{2} - \frac{2}{k}$ para $k \geq 4$	31
4 Má colocação	37

Introdução

Este trabalho tem como objetivo estudar o problema de Cauchy associado a equação de Zakharov-Kuznetsov generalizada (gZK):

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x \Delta u + u^k \partial_x u = 0 \\ u(\bar{x}, 0) = u_0(\bar{x}). \end{cases} \quad (2)$$

onde u é uma função a valores reais na variável (x, y, z, t) com $t \in \mathbb{R}$ e $\bar{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, e $k \in \mathbb{N}$.

Quando $k = 1$ a equação em (2) tem significado físico e foi formalmente deduzida por Zakharov e Kuznetsov (ZK) em [15] como um modelo assintótico para descrever a propagação de ondas iônico-acústicas não-lineares em um plasma magnetizado. Ainda com $k = 1$ a equação em (2) também pode ser vista como uma extensão natural da equação generalizada de Korteweg-de Vries (KdV) unidimensional:

$$\begin{cases} u_t + u_{xxx} + uu_x = 0 \\ u(0) = u_0. \end{cases} \quad (3)$$

Vale ressaltar que, ao contrário de algumas generalizações da equação KdV, a equação ZK não é completamente integrável e possui apenas duas quantidades invariantes pelo fluxo, elas são as normas em $L^2(\mathbb{R}^3)$

$$N(t) = \int_{\mathbb{R}^3} u^2(t, \bar{x}) d\bar{x},$$

e o Hamiltoniano

$$H(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \left((\nabla u(t, \bar{x}))^2 - \frac{u^3(t, \bar{x})}{3} \right) d\bar{x}.$$

Portanto, é uma questão natural estudar o problema de Cauchy para a equação (ZK) no espaço de Sobolev $H^1(\mathbb{R}^3)$, uma vez que qualquer boa colocação local que resulte neste espaço proporcionaria uma boa colocação global.

Em matemática, a equação em (2) tem sido amplamente estudada no que diz respeito a boa colocação, ou seja, procura-se saber sobre a existência e unicidade da solução da equação (2), e além disso, se as soluções dependem continuamente do valor inicial $u_0(\bar{x})$. Mais precisamente, dizemos que um problema de valor inicial (PVI) é bem posto em um certo espaço funcional X se a cada dado inicial $u_0 \in X$ corresponder uma única solução para o PVI e além disso, essa solução depender continuamente desta condição inicial. Caso contrário diz-se que o PVI é mal posto em X . A escolha mais comum para o espaço funcional X são os bem conhecidos espaços de Sobolev com base em L^2 . Procura-se estabelecer boa colocação em tais espaços com menor índice possível.

Vários trabalhos têm sido dedicados a questão de boa colocação em espaços de Sobolev. No caso bidimensional, temos os seguintes resultados:

1. Em 1995, Faminskii provou em [3] a boa colocação local e global da equação ZK para dados iniciais em $H^1(\mathbb{R}^2)$.
2. Em 2009, Linares e Pastor obtiveram em [8] a boa colocação local em $H^s(\mathbb{R}^2)$, $s > 3/4$. A principal ferramenta para obter esses resultados é a seguinte estimativa linear em $L_x^2 L_{yT}^\infty$

$$\|U(t)\varphi\|_{L_x^2 L_{yT}^\infty} \leq C \|\varphi\|_{H^s(\mathbb{R}^2)},$$

para todo $s > \frac{3}{4}$.

3. Em 2012, Ribaud e Vento provaram em [13] a boa colocação local nos espaços de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^2)$ para $s > \frac{1}{4}$ se $k = 2$, $s > \frac{5}{12}$ se $k = 3$ e $s > 1 - \frac{2}{k}$ se $k \geq 4$.
4. Em 2015, Molinet e Pilod provaram em [11] provaram a boa colocação local em $H^s(\mathbb{R}^2)$ para $s > \frac{1}{2}$ e a boa colocação global em $H^1(\mathbb{R} \times \mathbb{T})$.

Já no caso tridimensional, até onde sabemos, existem poucos resultados disponíveis sobre a boa colocação local da equação ZK nos habituais espaços de Sobolev, alguns desses resultados são:

1. Em 2009, Linares e Saut provaram em [10] boa colocação local em $H^s(\mathbb{R}^3)$, $s > \frac{9}{8}$.
2. Em 2011, Ribaud e Vento provaram a boa colocação local em $H^s(\mathbb{R}^3)$, $s > 1$, bem como no espaço de Besov $B_2^{1,1}(\mathbb{R}^3)$
3. Em 2015, Molinet e Pilod provaram em [11] a boa colocação global em $H^1(\mathbb{R}^3)$ para $s > 1$.

Vale ressaltar que em 2010, Grünrock provou em [6] que considerando dimensões espaciais $n = 2$ e $n = 3$ para expoentes inteiros $k \geq 3$, então para dados $u_0 \in B_{2,q}^{s_c}$, onde $1 \leq q \leq \infty$ e $s_c = \frac{n}{2} - \frac{2}{k}$ é a regularidade crítica de Sobolev, o problema é localmente bem posto e

globalmente bem colocado, se os dados são suficientemente pequenos.

A formulação integral para o PVI (2) é a seguinte:

$$u(t) = U(t)u_0 - \int_0^t U(t-\tau)\partial_x(u^{k+1})d\tau, \quad (4)$$

Aqui provaremos os seguintes resultados:

Teorema 0.1 *Seja $k \geq 4$, $s_k := \frac{3}{2} - \frac{2}{k}$. Se $s > s_k$ então para cada $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^3)$ existe $T = T(\|u_0\|_{H^s})$ e uma única solução de (4). Além disso, a aplicação dado-solução*

$$u_0 \in H^s(\mathbb{R}) \longmapsto u$$

é Lipschitz.

A idéia para provar o teorema acima segue bem de perto o argumento apresentado por Ribaud e Vento em [13]. Mostraremos que as idéias lá apresentadas se adaptam perfeitamente ao caso tridimensional. Para isso, usaremos o argumento do princípio de contração, onde transformaremos o PVI (2) na equação integral (4), cujas as soluções são pontos fixos do operador integral associado

$$\Psi(u) = U(t)u_0 - \int_0^t U(t-\tau)\partial_x(u^{k+1})d\tau.$$

Daí procuramos um espaço de Banach E relativo ao qual $\Psi : E \rightarrow E$ é uma contração. Um ponto crucial para isso é, como veremos, estimar a seguinte norma:

$$\|2^{sj}\|\Delta_j(u^{k+1})\|_{L_x^1 L_{yzT}^2}\|_{l^2(\mathbb{N})}.$$

O que torna difícil a obtenção da boa colocação é o fato que a não-linearidade da equação possui derivadas. De fato, devemos encontrar um subespaço $E \subseteq C([0, T]; H^s(\mathbb{R}))$, para algum T e algum s , tal que

$$u \in E \implies \Psi(u) \in E.$$

Em outras palavras, Ψ deverá ter a mesma regularidade de u . No entanto, ver-se que a parte integral da expressão de $\Psi(u)$ possui uma derivação, e sendo assim, não é óbvio que $\Psi(u)$ tenha regularidade s para uma função $u \in C([0, T], H^s(\mathbb{R}))$ qualquer. O subespaço E deve ser de uma tal forma que as funções $u \in E$ tenham propriedades adicionais que permitam concluir que a parte integral de $\Psi(u)$ ainda tenha regularidade s . Para contornar

as dificuldades expostas acima, nos valem dos seguintes resultados, conhecidos como efeitos suavizantes:

$$\|\nabla \int_0^t U(t-\tau)f(\tau)d\tau\|_{L_T^\infty L_x^2} \lesssim \|f\|_{L_x^1 L_{yzT}^2}$$

e

$$\|\nabla^2 \int_0^t U(t-\tau)f(\tau)d\tau\|_{L_x^\infty L_{yzT}^2} \lesssim \|f\|_{L_x^1 L_{yzT}^2}.$$

Teorema 0.2 *Seja $s_k = \frac{3}{2} - \frac{2}{k}$, com $k \geq 2$. Então o PVI (2) é mal posto em $H^{s_k}(\mathbb{R}^3)$*

A idéia para provar o teorema acima é mostrar que a aplicação dado-solução

$$u_0 \in H^{s_k}(\mathbb{R}^3) \mapsto u \in C^0([0, T]; H^{s_k}(\mathbb{R})),$$

não é contínua. Mais precisamente, encontraremos uma sequência de dados iniciais

$$(\phi_n) \subseteq H^{s_k}(\mathbb{R}^3)$$

tais que,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\phi_{n+1} - \phi_n\|_{H_k^{s_k}} \rightarrow 0,$$

mas que a família de soluções $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ correspondente aos dados iniciais satisfaça

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_{n+1}(t, \cdot) - u_n(t, \cdot)\|_{L_T^\infty H_x^{s_k}} \neq 0.$$

Para tal finalidade procuremos soluções do tipo "onda viajante"

$$u_c(\bar{x}, t) = \varphi(x - ct, y, z). \quad (5)$$

Esse trabalho está organizado da seguinte forma:

O primeiro capítulo é composto por resultados preliminares, onde veremos definições, notações e resultados que darão suporte à compreensão dos demais capítulos.

No segundo capítulo exibiremos a teoria linear, assim como algumas estimativas para o operador $U(t)$ associado a parte linear da equação ZK linear que dão suporte para estimar a parte linear da equação integral.

No terceiro capítulo é onde provamos o nosso resultado de boa colocação.

O quarto capítulo é onde provamos a má colocação.

Capítulo 1

Noções Preliminares

Neste capítulo enunciaremos alguns resultados e definições que serão essenciais na compreensão do texto.

1.1 Espaços de Lebesgue L^p

Nesta seção definiremos o que são os espaços L^p de Lebesgue bem como algumas de suas propriedades.

Definição 1.1 *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um domínio e seja $1 \leq p \leq \infty$. Dada $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ (ou \mathbb{C}) mensurável, definimos*

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ se } 1 \leq p < +\infty$$

e

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \text{esse sup}_{x \in \Omega} |f(x)|$$

e denotamos $L^p(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ é mensurável e } \|f\|_{L^p(\Omega)} < \infty\}$, que é chamado de espaço $L^p(\Omega)$ de Lebesgue.

Usaremos as notações L^p e $\|\cdot\|_{L^p}$, como abreviação $L^p(\Omega)$ e $\|f\|_{L^p(\Omega)}$, respectivamente.

Teorema 1.1 (Desigualdade de Hölder) *Sejam $p, q > 1$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Se $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$, então $fg \in L^1(\Omega)$ e*

$$\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}. \tag{1.1}$$

Demonstração: Ver referência [4]. □

Corolário 1.1 *Se $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ com $1 \leq p \leq q \leq \infty$ então $f \in L^r(\Omega)$ para todo $p \leq r \leq q$ e se tem a desigualdade:*

$$\|f\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p}^\theta \|f\|_{L^q}^{1-\theta},$$

onde $0 \leq \theta \leq 1$ e $\frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q}$.

Demonstração: Ver referência [4]. □

Teorema 1.2 (Desigualdade de Minkowski) *Se $1 \leq p < \infty$ e $f, g \in L^p(\Omega)$, então:*

$$\|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}.$$

Demonstração: Ver referência [4]. □

Agora enunciaremos a Desigualdade de Minkowski para integrais.

Teorema 1.3 *Seja $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (ou \mathbb{C}) mensurável tal que, $f(\cdot, y) \in L^p(\mathbb{R}^m)$ para quase todo ponto $y \in \mathbb{R}^n$, e que a função $y \mapsto \|f(\cdot, y)\|_{L^p(\mathbb{R}^m)}$ pertença a $L^1(\mathbb{R}^n)$. Então, a função $x \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) dy$ pertence a $L^p(\mathbb{R}^m)$ e*

$$\left\| \int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) dy \right\|_{L^p(\mathbb{R}^m)} \leq \int_{\mathbb{R}^n} \|f(\cdot, y)\|_{L^p(\mathbb{R}^m)} dy.$$

Demonstração: Ver referência [4]. □

Teorema 1.4 *Sejam $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ com $1 \leq p \leq \infty$. Então:*

$$\|f * g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^p}.$$

onde $(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y)dy$.

Demonstração: Ver referência [4]. □

Lema 1.1 (Desigualdade de Young) *Seja $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p, q \leq \infty$ com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1$. Então $f * g \in L^r(\mathbb{R}^n)$, onde $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$. Além disso*

$$\|f * g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$$

Demonstração: Ver referência [4]. □

1.2 Espaços de Lebesgue misto

Denotaremos os espaços $L_x^p L_{yzT}^q$ e $L_T^q L_{xyz}^p$ os espaços de Lebesgue nas variáveis espaço-tempo, com suas respectivas normas:

$$\|f(t, x)\|_{L_x^p L_{yzT}^q} = \| \|f(\cdot, x)\|_{L^q} \|_{L^p} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_0^T |f(x, t)|^q dt \right)^{\frac{p}{q}} dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

$$\|f(t, x)\|_{L_T^q L_x^p} = \| \|f(t, \cdot)\|_{L^p} \|_{L^q} = \left(\int_0^T \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x, t)|^p dx \right)^{\frac{q}{p}} dt \right)^{\frac{1}{q}},$$

$$\|f(t, x)\|_{L_T^q H_x^s} = \| \|f(t, \cdot)\|_{H^s} \|_{L^q} = \int_0^T \|f(t, \cdot)\|_{H^s}^q dt.$$

Enunciaremos agora a desigualdade de Hölder para os espaços de Lebesgue nas variáveis espaço-tempo.

Teorema 1.5 *Dado $f \in L_x^{p_1} L_{yzT}^{q_1}$ e $g \in L_x^{p_2} L_{yzT}^{q_2}$. Então $f \cdot g \in L_x^p L_{yzT}^q$ e vale*

$$\|f \cdot g\|_{L_x^p L_{yzT}^q} \leq \|f\|_{L_x^{p_1} L_{yzT}^{q_1}} \cdot \|g\|_{L_x^{p_2} L_{yzT}^{q_2}}.$$

onde $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$ e $\frac{1}{q} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2}$.

Demonstração: De fato, temos que

$$\|f \cdot g\|_{L_x^p L_{yzT}^q} := \left(\int_x \|f(x, \cdot)g(x, \cdot)\|_{L_{yzT}^q}^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Pela desigualdade de Hölder já vista,

$$\|f(x, \cdot)g(x, \cdot)\|_{L_{yzT}^q} \leq \|f(x, \cdot)\|_{L_{yzT}^q} \|g(x, \cdot)\|_{L_{yzT}^q},$$

daí

$$\|f \cdot g\|_{L_x^p L_{yzT}^q} \leq \left(\int_x \|f(x, \cdot)\|_{L_{yzT}^q}^p \|g(x, \cdot)\|_{L_{yzT}^q}^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Aplicando a desigualdade de Hölder com respeito a x obtemos o desejado. \square

Corolário 1.2 *Dado $\theta \in [0, 1]$ então vale*

$$\|f\|_{L_x^{p_\theta} L_{yzT}^{q_\theta}} \leq \|f\|_{L_x^{p_0} L_{yzT}^{q_0}}^{1-\theta} \|f\|_{L_x^{p_1} L_{yzT}^{q_1}}^\theta.$$

onde $\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$ e $\frac{1}{q_\theta} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$.

Demonstração: Sabemos que

$$\|f\|_{L_x^{p\theta} L_{yzT}^{q\theta}} = \left(\int_x \|f(x, \cdot)\|_{L_{yzT}^{q\theta}}^{p\theta} dx \right)^{\frac{1}{p\theta}}.$$

Aplicando o Corolário [1.1](#), temos

$$\|f(x, \cdot)\|_{L_{yzT}^{q\theta}} \leq \|f(x, \cdot)\|_{L_{yzT}^{q_0}}^{1-\theta} \|f(x, \cdot)\|_{L_{yzT}^{q_1}}^{\theta}. \quad (1.2)$$

Daí,

$$\|f\|_{L_x^{p\theta} L_{yzT}^{q\theta}} \leq \left(\int_x (\|f(x, \cdot)\|_{L_{yzT}^{q_0}}^{1-\theta} \|f(x, \cdot)\|_{L_{yzT}^{q_1}}^{\theta})^{p\theta} dx \right)^{\frac{1}{p\theta}}.$$

Aplicando a desigualdade de Hölder em relação x , temos o nosso resultado. \square

Lema 1.2 Dada $f \in L_x^\infty L_{\bar{y}}^p$ onde $\bar{y} \in \mathbb{R}^d$, então vale

$$\|f\|_{L_x^\infty L_{\bar{y}}^p} \leq \|f\|_{L_{\bar{y}}^p L_x^\infty}.$$

Demonstração: De fato, temos que

$$\|f\|_{L_x^\infty L_{\bar{y}}^p} = \sup_x \|f(x, \cdot)\|_{L_{\bar{y}}^p}.$$

Como $|f(x, y)| \leq \sup_r |f(x, r)|$, segue que

$$\|f(x, \cdot)\|_{L_{\bar{y}}^p} \leq \left\| \sup_r |f(r, \cdot)| \right\|_{L_{\bar{y}}^p} = \|f\|_{L_{\bar{y}}^p L_x^\infty}.$$

Tomando o supremo em x , obtém-se

$$\|f\|_{L_x^\infty L_{\bar{y}}^p} = \sup_x \|f(x, \cdot)\|_{L_{\bar{y}}^p} \leq \|f\|_{L_{\bar{y}}^p L_x^\infty}. \quad \square$$

1.3 A transformada de Fourier

Nesta seção veremos a definição e algumas das propriedades da transformada de Fourier. Começaremos com a transformada de Fourier em $L^1(\mathbb{R}^n)$.

1.3.1 A transformada de Fourier em $L^1(\mathbb{R}^n)$

Definição 1.2 Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. A transformada de Fourier de f , denotada por $\mathcal{F}(f)$ ou \widehat{f} é a função

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{n}}} \int f(x) e^{-ix \cdot \xi} dx, \quad x, \xi \in \mathbb{R}^n,$$

onde $x \cdot \xi = x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2 + \dots + x_n \xi_n$ é o produto escalar em \mathbb{R}^n .

Agora enunciaremos algumas propriedades da transformada de Fourier que são bastante conhecidas:

Proposição 1.1 *Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, então vale:*

1. $\widehat{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função contínua;
2. $\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \widehat{f}(\xi) = 0$ (Lema de Riemann - Lebesgue);
3. $\widehat{(\tau_h f)}(\xi) = e^{-ih \cdot \xi} \widehat{f}(\xi)$, onde $\tau_h f(x) = f(x - h)$;
4. $\mathcal{F}(e^{ix \cdot h} f)(\xi) = \tau_h \widehat{f}(\xi)$;
5. Dado $a > 0$, $\widehat{\delta_a f}(\xi) = a^{-n} \widehat{f}(a^{-1} \xi)$, onde $\delta_a f(x) = f(ax)$.
6. $\widehat{(f * g)}(\xi) = \widehat{f}(\xi) \widehat{g}(\xi)$, onde

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y) g(y) dy.$$
7. $\int \widehat{f} g d\xi = \int f \widehat{g} d\xi$.

Demonstração: Uma demonstração dessas propriedades pode ser vista na referência [7].

□

1.3.2 A transformada de Fourier no Espaço de Schwartz

Falaremos agora da transformada de Fourier no espaço de Schwartz.

Definição 1.3 *Chamamos de espaço de funções $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ de decaimento rápido, também conhecido como espaço de Schwartz, ao espaço:*

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \|\varphi\|_{\alpha, \beta} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)| < \infty, \forall \text{ multi-índices } \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n\}.$$

Iremos designar $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ apenas por \mathcal{S} .

Observação 1.1 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subseteq L^p(\mathbb{R}^n)$, para todo $1 \leq p \leq +\infty$.

A transformada de Fourier possui as seguintes propriedades:

Teorema 1.6 *Se $\varphi \in \mathcal{S}$, então:*

1. $\widehat{(\partial^\alpha \varphi)}(\xi) = (i\xi)^\alpha \widehat{\varphi}(\xi)$;
2. $\mathcal{F}((-i \cdot)^\alpha \varphi(\cdot))(\xi) = \partial^\alpha \widehat{\varphi}(\xi)$;
3. $\widehat{\varphi} \in \mathcal{S}$, ou seja, $\mathcal{F} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$.

Demonstração: Ver referência [5] ou [7].

□

O Teorema a seguir nos permite definir a inversa da transformada de Fourier em \mathcal{S} .

Teorema 1.7 *Seja $\varphi \in \mathcal{S}$, então $\widehat{\varphi} \in \mathcal{S}$ e além disso vale:*

$$\varphi(x) = \int \widehat{\varphi}(\xi) e^{ix \cdot \xi} d\xi.$$

Demonstração: Ver referência [5] ou [7]. □

1.3.3 A transformada de Fourier em $L^p(\mathbb{R}^n)$ com $1 < p \leq 2$

Nesta seção veremos que a noção de transformada de Fourier pode ser estendida a uma classe de funções bem mais ampla que L^1 . Para isso começamos com o seguinte resultado, conhecido como teorema de Plancherel.

Teorema 1.8 *Se $f \in L^1 \cap L^2$, então $\widehat{f} \in L^2$ e:*

$$\|f\|_{L^2} = \|\widehat{f}\|_{L^2}.$$

Demonstração: Ver referência [9]. □

Observação 1.2 *Este resultado mostra que a transformada de Fourier define um operador linear de $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ em $L^2(\mathbb{R}^n)$. De fato, esse operador é uma isometria. Assim, existe uma única extensão limitada de \mathcal{F} a todo o $L^2(\mathbb{R}^n)$. Ainda denotaremos tal extensão por \mathcal{F} ou $\widehat{\cdot}$.*

Tendo definido \mathcal{F} em L^1 e L^2 como operadores lineares contínuos e tendo em vista que $L^p \subseteq L^1 + L^2$ para todo $1 \leq p \leq 2$, pode-se facilmente definir a transformada de Fourier em L^p para $1 \leq p \leq 2$. Além disso vale o seguinte:

Lema 1.3 (Desigualdade de Hausdorff - Young) *Seja $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq 2$. Então $\widehat{f} \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ com $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ e*

$$\|\widehat{f}\|_{p'} \leq \|f\|_p.$$

Demonstração: Ver referência [9]. □

1.3.4 A transformada de Fourier de uma distribuição

Nas seções anteriores vimos que a transformada de Fourier pode ser definida em L^p , $1 \leq p \leq 2$, mas para $p > 2$ é sabido que é possível estendê-la como um operador limitado, um

conceito mais amplo que o de função onde fará sentido definir a transformada de Fourier para funções em L^p qualquer que seja p . Nesta seção veremos a grande importância de estudar distribuições temperadas.

Definição 1.4 *Uma distribuição temperada é um funcional linear contínuo $F : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$. O dual de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, ou seja, o conjunto de todas as distribuições temperadas, será designado pela notação $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, ou simplesmente, por \mathcal{S}' .*

Portanto, $F \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ se, e somente se,

1. $F : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}$ é linear e;
2. Dada qualquer sequência $(\varphi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ de funções tal que $\varphi_j \rightarrow 0$, tivermos que $F(\varphi_j) \rightarrow 0$ quando $j \rightarrow \infty$.

As vezes usaremos $\langle F, \varphi \rangle$ no lugar de $F(\varphi)$.

Definição 1.5 *Dizemos que uma função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ é de crescimento polinomial no infinito, ou simplesmente, de crescimento polinomial, quando existem $C, M \geq 0$ tais que:*

$$|f(x)| \leq C(1 + |x|)^M, \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Teorema 1.9 *Toda função localmente integrável de crescimento polinomial no infinito define uma distribuição temperada. Em particular, toda função limitada e toda função em $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$ define uma distribuição temperada pela fórmula:*

$$F_f(\varphi) = \int f\varphi dx. \tag{1.3}$$

Demonstração: Ver referência [5]. □

Definição 1.6 *Dada $F \in \mathcal{S}'$, definimos sua transformada de Fourier por*

$$\widehat{F}(\varphi) = \langle \widehat{F}, \varphi \rangle = \langle F, \widehat{\varphi} \rangle = F(\widehat{\varphi}), \forall \varphi \in \mathcal{S}. \tag{1.4}$$

Observação 1.3 *Se $f \in L^1$, então a transformada de Fourier de f coincide com a sua transformada de Fourier no sentido das distribuições. Portanto, a Definição (1.6) é consistente com a teoria de transformada de Fourier em L^1 e também em \mathcal{S} .*

Teorema 1.10 *A transformada de Fourier $\mathcal{F} : \mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}'$ é um isomorfismo, e ambos, \mathcal{F} e \mathcal{F}^{-1} são operados lineares contínuos.*

Demonstração: Ver referência [5]. □

Teorema 1.11 *A transformada de Fourier $\mathcal{F} : \mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}'$ satisfaz as seguintes propriedades:*

1. $(\widehat{\partial^\alpha F})(\xi) = (i\xi)^\alpha \widehat{F}(\xi)$, para qualquer multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}^n$;
2. $\mathcal{F}((-ix)^\alpha F)(\xi) = \partial_\xi^\alpha \widehat{F}(\xi)$;
3. $(\widehat{\tau_h F}) = e^{-ih \cdot \xi} \widehat{F}(\xi)$;
4. $\mathcal{F}(e^{ix \cdot h} F)(\xi) = \tau_h \widehat{F}(\xi)$.

Demonstração: Ver referência [5]. □

Definição 1.7 *Dadas $F \in \mathcal{S}'$ e $\psi \in \mathcal{S}$ definimos ao produto de convolução de F e ψ por:*

$$F * \psi(x) = \langle F, \tau_{-x} \psi(\cdot) \rangle = \langle F, \tau_{(-x)} \psi(x - \cdot) \rangle.$$

Teorema 1.12 *Se $F \in \mathcal{S}'$ e $\psi \in \mathcal{S}$, então:*

$$\widehat{F * \psi} = \widehat{F} \widehat{\psi},$$

onde $\widehat{F} \widehat{\psi} \in \mathcal{S}'$ é definido como:

$$\widehat{F} \widehat{\psi}(\varphi) = \langle \widehat{F} \widehat{\psi}, \varphi \rangle = \langle \widehat{F}, \widehat{\psi} \varphi \rangle = \widehat{F}(\widehat{\psi} \varphi).$$

Demonstração: Ver referência [5]. □

1.4 Espaços de Sobolev

Nesta seção estudaremos os espaços de Sobolev que são uma ferramenta fundamental no estudos das EDP's dispersivas. Falaremos algumas propriedades dos espaços de Sobolev do tipo $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Definição 1.8 *Dado $s \in \mathbb{R}$, definimos os espaços de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$ por:*

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : J^s f \in L^2(\mathbb{R}^n), \text{ onde } J^s f = \left((1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \widehat{f} \right)^\vee \}$$

munido da norma

$$\|f\|_{H^s} = \|J^s f\|_{L^2} = \|(1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \widehat{f}\|_{L^2}$$

Agora veremos um teorema de interpolação para os espaços H^s .

Teorema 1.13 (Interpolação) *Sejam $s_1 \leq s \leq s_2$ e $\theta \in [0, 1]$, números reais tais que $s = \theta s_1 + (1 - \theta)s_2$. Então $f \in H^s$ e*

$$\|f\|_{H^s} \leq \|f\|_{H^{s_1}}^\theta \|f\|_{H^{s_2}}^{1-\theta}.$$

Demonstração: Ver referência [9]. □

O seguinte Teorema nos ajuda a evidenciar que os espaços H^s de fato revelam propriedades de diferenciabilidade das funções.

Teorema 1.14 (Imersão de Sobolev) *Seja $s > k + \frac{n}{2}$.*

1. *Se $f \in H^s$, então $\widehat{(\partial^\alpha f)} \in L^1$ e*

$$\|\widehat{(\partial^\alpha f)}\|_{L^1} \leq C\|f\|_{H^s}, \forall |\alpha| \leq k, \text{ onde } C = C(k - s)$$

2. $H^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C_\infty^k(\mathbb{R}^n)$. *Em outras palavras, se $f \in H^s$, $s > k + \frac{n}{2}$ então $f \in C_\infty^k(\mathbb{R}^n)$ e*

$$\|f\|_{C^k} \leq C\|f\|_{H^s}$$

Demonstração: A demonstração pode ser vista na referência [9]. □

Vimos até no Teorema 1.14 que as funções nos espaços de Sobolev H^s tem uma certa suavidade, que depende do índice s . O Teorema a seguir diz que as funções de H^s têm também um certo decaimento.

Teorema 1.15 *Se $s \in (0, \frac{n}{2})$, então $H^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^p$ com $p = \frac{2n}{n-2s}$, isto é, $s = \frac{n}{2} - \frac{n}{p}$. Além disso, dado $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$, $s \in (0, \frac{n}{2})$, tem-se que:*

$$\|f\|_{L^p} \leq C_{n,s}\|D^s f\|_{L^2} \leq C\|f\|_{H^s}$$

Demonstração: Ver referência [9]. □

1.5 Decomposição de Littlewood - Paley

Consideramos uma função $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tal que:

1. $\text{supp}(\varphi) = \{\xi \in \mathbb{R}^n : 2^{-1} \leq |\xi| \leq 2\}$;
2. $\varphi(\xi) > 0$ para $2^{-1} < |\xi| < 2$;
3. $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi(2^{-k}\xi) = 1, \forall \xi \neq 0$.

A função φ deve ter o aspecto ilustrado na figura abaixo.

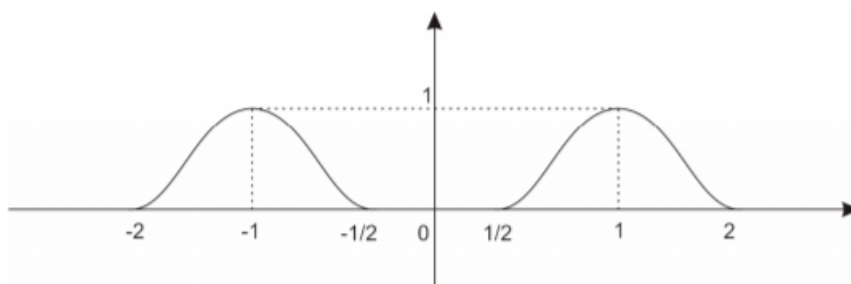


Figura 1.1: Gráfico da função φ

Definição 1.9 Seja $\varphi \in \mathcal{S}$ a função como acima. Para cada $r \in \mathbb{Z}$ colocamos

$$\varphi_r(\xi) = \varphi(2^{-r}\xi).$$

Vemos que

$$\sum_{r \in \mathbb{Z}} \varphi_r(\xi) = 1,$$

para todo $\xi \neq 0$, e

$$\text{supp}(\varphi_r) \subset \{2^{r-1} \leq |\xi| \leq 2^{r+1}\}.$$

Definição 1.10 Os Multiplicadores de Littlewood-Paley são definidos como:

$$\Delta_r f = \mathcal{F}^{-1}(\varphi_r \widehat{f}) = \check{\varphi}_r * f$$

e

$$P_r f = \sum_{k \leq r} \Delta_k f,$$

para todo $f \in \mathcal{S}'$ e para todo $r \in \mathbb{Z}$.

Lema 1.4 Para cada $r \in \mathbb{Z}$, definimos:

$$\tilde{\Delta}_r f = \sum_{l=-1}^1 \Delta_{r+l} f$$

então $\tilde{\Delta}_r \circ \Delta_r = \Delta_r, \forall r \in \mathbb{Z}$.

Demonstração: Ver referência [2].

□

Definição 1.11 Dado $s \in \mathbb{R}$, definimos os operadores $J^s : \mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}'$ e $D^s : \mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}'$ por

$$J^s f = \mathcal{F}^{-1} \left((1 + |\cdot|^2)^{\frac{s}{2}} \widehat{f} \right), \forall f \in \mathcal{S}'.$$

$$D^s f = \mathcal{F}^{-1} \left(|\cdot|^s \widehat{f} \right), \text{ para } f \in \mathcal{S}' \text{ tal que } 0 \notin \text{supp}(\widehat{f}).$$

Definição 1.12 Definimos o operador de restrição em baixas frequências por

$$P_0 f = \mathcal{F}^{-1}(\psi \widehat{f})$$

onde

$$\psi(\xi) = 1 - \sum_{r \geq 1} \varphi_r(\xi). \tag{1.5}$$

Note que $\psi \in \mathcal{S}$ é tal que $\psi(\xi) = 1$, para todo $\xi \in B(0, 1)$, $0 \leq \psi \leq 1$ e $\text{supp}(\psi) = B[0, 2]$. A função ψ deve ter o aspecto ilustrado na figura abaixo.



Figura 1.2: Gráfico da função ψ

Observação 1.4 De (1.5) e da definição de ψ , temos

$$\text{supp}(\widehat{P_r f}) \subseteq \text{supp}(\psi(2^{-r} \cdot)) = \{\xi \in \mathbb{R}^n : |2^{-r} \xi| \leq 2\} = \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leq 2^{r+1}\}.$$

Ou seja,

$$\text{supp}(\widehat{P_r f}) \subseteq \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leq 2^{r+1}\}.$$

Desse fato, segue que se $|\xi| \leq 2^r$, então $|2^{-r} \xi| \leq 1$; daí $\psi(2^{-r} \xi) = 1$ e disso concluímos que, $\widehat{P_r f} = \widehat{f}$, se $|\xi| \leq 2^r$.

Observação 1.5 $\text{supp}(\widehat{\Delta_r f}) \subseteq \{\xi \in \mathbb{R}^n : 2^{r-1} \leq |\xi| \leq 2^{r+1}\}$. De fato, como

$$\text{supp}(\varphi) = \{\xi : \frac{1}{2} \leq |\xi| \leq 2\},$$

segue que $\varphi_r(\xi) = \varphi(2^{-r} \xi) \neq 0$ se, e somente se, $\frac{1}{2} \leq |2^{-r} \xi| \leq 2$, ou seja, $2^{r-1} \leq |\xi| \leq 2^{r+1}$.

Observação 1.6 Dada $f \in \mathcal{S}'$, temos

$$f = \sum_{r \in \mathbb{Z}} \Delta_r f.$$

De fato, temos

$$\sum_{r \in \mathbb{Z}} \Delta_r f = \mathcal{F}^{-1} \left(\sum_{r \in \mathbb{Z}} \varphi_r \widehat{f} \right) = \mathcal{F}^{-1}(\widehat{f}) = f.$$

Uma fato interessante relacionado a decomposição de Littlewood-Paley é o seguinte:

Proposição 1.2 Com as notações e definições estabelecidas acima, segue que uma norma equivalente em $H^s(\mathbb{R}^n)$ é dada por,

$$\|f\|_{H^s} \sim \|P_0 f\|_{L^2} + \|2^{sj} \|\Delta_j f\|_{L^2}\|_{l^2(\mathbb{N})}$$

Demonstração: Ver referência [12] ou a [2]. □

Proposição 1.3 Seja $1 \leq p \leq \infty$ e seja $f \in \mathcal{S}'$ tal que $\Delta_r f \in L^p$. Então para todo $s \in \mathbb{R}$ tem - se:

- 1) $\|J^s \Delta_r f\|_{L^p} \lesssim 2^{sr} \|\Delta_r f\|_{L^p}$, para todo $r \geq 1$;
- 2) $\|D^s \Delta_r f\|_{L^p} \lesssim 2^{sr} \|\Delta_r f\|_{L^p}$, para todo $r \in \mathbb{Z}$;
- 3) Se $P_0 f \in L^p$, então $\|J^s P_0 f\|_{L^p} \lesssim \|P_0 f\|_{L^p}$.

Demonstração: Ver referência [2]. □

Lema 1.5 Seja $f : \mathbb{R} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{C}$ ($0 < T < \infty$) uma função suave e sejam $1 \leq p, q \leq \infty$. Então para qualquer $r \in \mathbb{N}$ vale a seguinte estimativa

$$\|D_x^s \Delta_r f\|_{L_x^p L_{yzT}^q} \lesssim 2^{sr} \|\Delta_r f\|_{L_x^p L_{yzT}^q} \quad (s \in \mathbb{R}). \quad (1.6)$$

Ainda, a estimativa (1.6) vale para ∂_x^k com $k \in \mathbb{N}$ no lugar de D_x^s .

Demonstração: Do Lema 1.4 e das desigualdades de Minkowski para integrais e de Young, temos

$$\begin{aligned} \|\Delta D_x^s f\|_{L_x^p L_{yzT}^q} &= \|\tilde{\Delta}_j \Delta_j D_x^s f\|_{L_x^p L_{yzT}^q} = \|\tilde{\varphi}_j \vee * \Delta_j D_x^s f\|_{L_x^p L_{yzT}^q} \\ &= \|(D_x^s \tilde{\varphi}_j)^\vee * \Delta_j f\|_{L_x^p L_{yzT}^q} = \| \|(D_x^s \tilde{\varphi}_j)^\vee * \Delta_j f\|_{L_{yzT}^q} \|_{L_x^p} \\ &= \| \int_{-\infty}^{+\infty} (D_h^s \tilde{\varphi}_j(h))^\vee \Delta_j(x-h, y, z, t) dh \|_{L_{yzT}^q} \|_{L_x^p} \\ &\lesssim \|(D_x^s \tilde{\varphi}_j)^\vee\|_{L_x^1} \|\Delta_j f\|_{L_x^p L_{yzT}^q} \end{aligned}$$

Agora, já que $\tilde{\varphi} \in \mathcal{S}$,

$$\begin{aligned} \|(D_x^s \tilde{\varphi}_j)^\vee\|_{L_x^1} &= \|\mathcal{F}^{-1}(|\xi|^s \tilde{\varphi}_j(\xi))\|_{L^1} = \left\| \int_{\mathbb{R}} e^{ix \cdot \xi} |\xi|^s \varphi(2^{-j}\xi) d\xi \right\|_{L_x^1} \\ &= \left\| \int_{\mathbb{R}} e^{ix \cdot 2^j \eta} |2^j \eta|^s \tilde{\varphi}(\eta) 2^j d\eta \right\|_{L_x^1} = \left\| \int_{\mathbb{R}} e^{i2^j x \cdot \eta} 2^{js} |\eta|^s \tilde{\varphi}(\eta) 2^j d\eta \right\|_{L_x^1} \\ &= 2^{js} \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} e^{i2^j x \cdot \eta} |\eta|^s \tilde{\varphi}(\eta) 2^j dx \right| = 2^{js} \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} e^{iy \cdot \eta} |\eta|^s \tilde{\varphi}(\eta) d\eta \right| dy \\ &= 2^{js} \|D^s(\tilde{\varphi})^\vee\|_{L^1} \leq C 2^{js} \end{aligned}$$

e com isso segue o nosso resultado. \square

Lema 1.6 *Seja $f : \mathbb{R} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{C}$ ($0 < T < \infty$) uma função suave e sejam $1 \leq p, q \leq \infty$.*

Então vale a seguinte estimativa

$$\|D_x^s P_0 f\|_{L_x^p L_{yzT}^q} \lesssim \|P_0 f\|_{L_x^p L_{yzT}^q} \quad (s \in \mathbb{R}). \quad (1.7)$$

Ainda, a estimativa (1.6) vale para ∂_x^k com $k \in \mathbb{N}$ no lugar de D_x^s .

Demonstração: Do Lema 1.4 e das desigualdades de Minkowski para integrais e de Young, temos

$$\begin{aligned} \|P_0 D_x f\|_{L_x^p L_{yzT}^q} &= \left\| \sum_{j \leq 0} \Delta_j D_x^s f \right\|_{L_x^p L_{yzT}^q} \leq \sum_{j \leq 0} \|\Delta_j D_x^s f\|_{L_x^p L_{yzT}^q} \\ &= \sum_{j \leq 0} \|\tilde{\Delta}_j \circ \Delta_j D_x^s f\|_{L_x^p L_{yzT}^q} = \sum_{j \leq 0} \|(\tilde{\varphi}_j)^\vee * \Delta_j D_x^s f\|_{L_x^p L_{yzT}^q} \\ &= \sum_{j \leq 0} \|(D_x^s \tilde{\varphi}_j)^\vee * \Delta_j f\|_{L_x^p L_{yzT}^q} \\ &= \sum_{j \leq 0} \left\| \int_{-\infty}^{+\infty} (D_x^s \tilde{\varphi}_j)^\vee(x_j) \Delta_j f(x - x_1, \cdot) dx_1 \right\|_{L_{yzT}^q} \|L_x^p\| \\ &\lesssim \sum_{j \leq 0} \|(D_x^s \tilde{\varphi}_j)^\vee\|_{L_x^1} \|\Delta_j f\|_{L_x^p L_{yzT}^q}. \end{aligned}$$

Como $\tilde{\varphi}_j \in \mathcal{S}$, segue que

$$\|(D_x^s \tilde{\varphi}_j)^\vee\|_{L_x^1} \leq C 2^{js}.$$

Daí, pelo fato de termos $j \leq 0$, tem-se

$$\begin{aligned} \|P_0 D_x f\|_{L_x^p L_{yzT}^q} &\lesssim \sum_{j \leq 0} 2^{js} \|\Delta_j f\|_{L_x^p L_{yzT}^q} \\ &= \sum_{j \leq 0} 2^{js} \|\Delta_j P_0 f\|_{L_x^p L_{yzT}^q} \lesssim \|P_0 f\|_{L_x^p L_{yzT}^q} \end{aligned}$$

\square

Lema 1.7 *Dado qualquer inteiro $j \geq 3$, tem-se:*

$$\Delta_j(P_0 f P_0 g) = 0. \quad (1.8)$$

Demonstração: Ver referência [2]. □

Lema 1.8 (Desigualdade de Bernstein) *Seja $f : \mathbb{R} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{C}$ ($0 < T < \infty$) tal que $\text{supp}(\hat{f}) \subset B_R(0)$ e seja $f \in L_x^p L_{yzT}^q$, então para todo $p \geq p_1$ e $f \in L_x^p L_{yzT}^q$, vale:*

$$\|f\|_{L_x^p L_{yzT}^q} \leq R^{n\left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p}\right)} \|f\|_{L_x^{p_1} L_{yzT}^q}. \quad (1.9)$$

Demonstração: Ver referência [12]. □

Capítulo 2

O grupo associado a equação Zakharov-Kuznetsov

Neste capítulo vamos apresentar algumas propriedades do grupo associado à equação de Zakharov - Kuznetsov (ZK) linear, que serão de suma importância na demonstração do teorema de boa colocação.

2.1 Teoria linear

Considere o problema de Cauchy associado à equação ZK linear, isto é:

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x \Delta u = 0, & \bar{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad t \in \mathbb{R} \\ u(\cdot, 0) = u_0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Aplicando a transformada de Fourier em relação a \bar{x} em (2.1), transformamos o PVI (2.1) no seguinte problema:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \hat{u}(\bar{\xi}, t) = -i\xi |\bar{\xi}|^2 \hat{u}(\bar{\xi}, t) \\ \hat{u}(\bar{\xi}, 0) = \hat{u}_0(\bar{\xi}), \end{cases}$$

cujas soluções são

$$\hat{u}(\bar{\xi}, t) = e^{-it\xi |\bar{\xi}|^2} \hat{u}_0(\bar{\xi}). \quad (2.2)$$

Daí aplicando em (2.2) a transformada de Fourier inversa, temos

$$u(\bar{x}, t) = (e^{-it\xi |\bar{\xi}|^2} \hat{u}_0)^\vee(\bar{x}) = (e^{-it\xi |\bar{\xi}|^2})^\vee * u_0(\bar{x}). \quad (2.3)$$

Denotamos a expressão em (2.3) por:

$$U(t)u_0(\bar{x}).$$

Para cada $t \in \mathbb{R}$ a aplicação

$$u_0 \mapsto U(t)u_0$$

define um operador linear.

A família de operadores $\{U(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ possui as seguintes propriedades.

Proposição 2.1 *O operador $U(t)u_0$ satisfaz:*

1. $U(t + \tau)u_0 = U(t) \circ U(\tau)u_0$, para todo $t, \tau \in \mathbb{R}$
2. $\|U(t)u_0\|_{H^s} = \|u_0\|_{H^s}$, para todo $t \in \mathbb{R}$ e $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^n)$, para $s \geq 0$

Demonstração: De fato,

1.

$$\begin{aligned} U(t + \tau)u_0(x) &= (e^{-i\xi|\bar{\xi}|^2(t+\tau)}\widehat{u}_0(\bar{\xi}))^\vee(\bar{x}) = (e^{-i\xi|\bar{\xi}|^2t} \left(e^{-i\xi|\bar{\xi}|^2\tau}\widehat{u}_0(\bar{\xi}) \right))^\vee(\bar{x}) \\ &= [U(t) \circ U(\tau)]u_0. \end{aligned}$$

2. Sabemos que,

$$\|f\|_{H^s} = \|J^s f\|_{L^2} = \|(1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}}f\|_{L^2}.$$

Daí,

$$\begin{aligned} \|U(t)u_0\|_{H^s} &= \|U(t)J^s u_0\|_{L^2} = \|e^{-it\xi|\bar{\xi}|^2}(1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\widehat{u}_0\|_{L^2} \\ &= \|(1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\widehat{u}_0\|_{L^2} = \|J^s u_0\|_{L^2} = \|u_0\|_{H^s}. \square \end{aligned}$$

Podemos assim dizer que $\{U(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ é um grupo de operadores unitários.

Vejam agora o PVI não homogêneo. Seja $f \in S(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R})$ não identicamente nula.

Consideremos o PVI

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x \Delta u = f(\bar{x}, t), & \bar{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad t \in \mathbb{R} \\ u(\cdot, 0) = u_0(\cdot). \end{cases} \quad (2.4)$$

Aplicando a transformada de Fourier ao PVI (2.4), obtemos

$$\begin{cases} \partial_t \widehat{u} - i\xi|\bar{\xi}|^2 \widehat{u} = \widehat{f}(\bar{\xi}, t) \\ \widehat{u}(\cdot, 0) = \widehat{u}_0, \end{cases} \quad (2.5)$$

para cada $\xi \in \mathbb{R}^n$. Usando o método de Leibniz do fator integrante para EDO's lineares de primeira ordem, chegamos a seguinte solução do PVI (2.5):

$$\widehat{u}(\bar{\xi}, t) = e^{-it\xi|\bar{\xi}|^2} \widehat{u}_0 + \int_0^t e^{-i|\bar{\xi}|^2(t-\tau)\xi} \widehat{f}(\bar{\xi}, \tau) d\tau. \quad (2.6)$$

Agora, aplicando a transformada inversa de Fourier em (2.6), chegamos a solução do PVI

(2.4):

$$u(\bar{x}, t) = U(t)u_0 + \int_0^t U(t - \tau)f(\bar{x}, \tau) d\tau. \quad (2.7)$$

2.2 Algumas estimativas lineares

Nesta seção iremos estudar algumas propriedades do grupo $\{U(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$. Vimos na seção anterior que $U(t)f$ é uma isometria em H^s , para todo s . Isso quer dizer que se f tem regularidade s em L^2 então $U(t)f$ terá essa mesma regularidade para todo $t \in \mathbb{R}$. O próximo resultado diz que se $f \in H^s$ então $U(t)f$ poderá ter $s+1$ derivadas, com respeito a uma certa norma, a saber a norma do espaço $L_x^\infty L_{yzT}^2$. Esta estimativa é conhecida como efeito suavizante. Ela é de fundamental importância para tratar equações que possuem derivadas na não-linearidade.

Proposição 2.2 Efeito suavizante de Kato *Para qualquer $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^3)$, vale:*

$$\|\nabla U(t)\varphi\|_{L_x^\infty L_{yzT}^2} \lesssim \|\varphi\|_{L^2}.$$

Demonstração: Ver Proposição 3.1 da referência [14]. □

Proposição 2.3 *Seja $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$, então temos:*

$$\|\nabla \int_0^t U(t-\tau)f(\tau)d\tau\|_{L_T^\infty L_x^2} \lesssim \|f\|_{L_x^1 L_{yzT}^2}.$$

Demonstração: Ver Proposição 3.5 da referência [14]. □

Proposição 2.4 *Seja $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$, então temos:*

$$\|\nabla^2 \int_0^t U(t-\tau)f(\tau)d\tau\|_{L_x^\infty L_{yzT}^2} \leq c\|f\|_{L_x^1 L_{yzT}^2}.$$

Demonstração: Ver Proposição 3.6 da referência [14]. □

A próxima estimativa será de fundamental importância para podermos lidar com a não-linearidade da equação. Ela juntamente com os efeitos suavizantes é que nos permitirão contornar o problema da perda de derivadas. O resultado de boa colocação obtido está muito ligado a tal estimativa. De fato, como observado em [8] qualquer melhoramento de tal estimativa implicaria num resultado de boa colocação com índices mais baixo.

Proposição 2.5 (Estimativa Maximal em L^2) *Para $0 < T < 1$, $s > 1$ e algum $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$, vale:*

$$\|U(t)\varphi\|_{L_x^2 L_{yzT}^\infty} \lesssim \|\varphi\|_{H^s}.$$

Demonstração: Ver Proposição 3.3 da referência [14]. □

Lema 2.1 Dada $f \in H^{\frac{1}{2}+}(\mathbb{R}^3)$, temos:

$$\|U(t)f\|_{L_x^\infty L_{yzT}^2} \lesssim T^{\frac{1}{2}} \|f\|_{H^{\frac{1}{2}+}}.$$

Demonstração: De fato, do Lema [1.2](#), temos

$$\|U(t)f\|_{L_x^\infty L_{yzT}^2} \leq \|U(t)f\|_{L_{yzT}^2 L_x^\infty} = \| \|U(t)f\|_{L_x^\infty} \|1\|_{L_{yzT}^2}.$$

Para cada y, z, t fixados, temos

$$\|U(t)f(\cdot, y, z, t)\|_{L_x^\infty} \lesssim \|J_x^{\frac{1}{2}+} U(t)f(\cdot, y, z, t)\|_{L_x^2},$$

daí,

$$\|U(t)f\|_{L_x^\infty L_{yzT}^2} \lesssim \|J_x^{\frac{1}{2}+} U(t)f\|_{L_{T,\bar{x}}^2} = \| \|U(t)J_x^{\frac{1}{2}+} f\|_{L_{\bar{x}}^2} \|1\|_{L_T^2}.$$

Como,

$$\|U(t)J_x^{\frac{1}{2}+} f\|_{L_{\bar{x}}^2} = \|J_x^{\frac{1}{2}+} f\|_{L_{\bar{x}}^2} \leq \|J_x^{\frac{1}{2}+} f\|_{L_{\bar{x}}^2},$$

segue que,

$$\|U(t)f\|_{L_x^\infty L_{yzT}^2} \leq \|J_x^{\frac{1}{2}+} f\|_{L_T^2 L_{\bar{x}}^2} \leq T^{\frac{1}{2}} \|J_x^{\frac{1}{2}+} f\|_{L_T^\infty L_{\bar{x}}^2} \lesssim T^{\frac{1}{2}} \|f\|_{H^{\frac{1}{2}+}}.$$

□

Lema 2.2 Seja $T \leq 1, k \geq 0$. Então para qualquer $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$,

$$\left\| \int_0^t U(t-\tau) P_0 f(\tau) d\tau \right\|_{L_x^2 L_{yzT}^\infty} \lesssim \|P_0 f\|_{L_x^1 L_{yzT}^2}, \quad (2.8)$$

$$\left\| \int_0^t U(t-\tau) \Delta_j f(\tau) d\tau \right\|_{L_x^2 L_{yzT}^\infty} \lesssim \|\Delta_j f\|_{L_x^1 L_{yzT}^2}. \quad (2.9)$$

Demonstração: Ver Proposição 3.7 da referência [\[14\]](#).

□

Capítulo 3

Boa colocação local

Neste capítulo provaremos a boa colocação do problema de valor inicial associado à equação de Zakharov-Kuznetsov generalizada (gZK):

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x \Delta u + u^k \partial_x u = 0 \\ u(\bar{x}, 0) = u_0(\bar{x}) \end{cases} \quad (3.1)$$

onde u é uma função de valor real de (x, y, z, t) com $t \in \mathbb{R}$ e $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, e $k \geq 4$.

Observe que se u é uma solução de (3.1) então de acordo com (2.7) u deve satisfazer a seguinte equação integral

$$u(t) = U(t)u_0 - \int_0^t U(t - \tau) \partial_x(u^{k+1})(\tau) d\tau. \quad (3.2)$$

Provaremos aqui que para dados iniciais $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^3)$ com $s > s_k := \frac{3}{2} - \frac{2}{k}$ e $k \geq 4$ a equação integral possui solução, e que esta é única. Mais precisamente demonstraremos aqui o seguinte Teorema:

Teorema 3.1 *Seja $k \geq 4$, $s_k := \frac{3}{2} - \frac{2}{k}$. Se $s > s_k$ então para cada $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^3)$ existe $T = T(\|u_0\|_{H^s})$ e uma única solução de (3.2). Além disso, a aplicação $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^3) \mapsto u$ é Lipschitz.*

O método para demonstrar o Teorema acima consiste em aplicar o teorema do ponto fixo de Banach à equação integral (3.2). Mais precisamente, nosso objetivo é encontrar um espaço métrico completo X_T relativo ao qual o operador integral

$$u \in X_T \mapsto \Psi(u) = U(t)u_0 - \int_0^t U(t - \tau) \partial_x(u^{k+1})(\tau) d\tau,$$

satisfaça:

i) $\Psi(X_T) \subseteq X_T$

ii) $\Psi : X_T \rightarrow X_T$ é uma contração.

Para tanto, fazemos uso das estimativas associadas à parte linear da equação ZK, chamadas de efeitos regularizantes do operador $U(t)$ e também de uma estimativa maximal, apresentadas na Seção 2.2 do Capítulo anterior.

Dado $T > 0$ definimos as seguintes semi-normas:

$$N_1(u) = \|P_0 u\|_{L_T^\infty L_x^2} + \|2^{sj} \|\Delta_j u\|_{L_T^\infty L_x^2}\|_{l^2(\mathbb{N})};$$

$$N_2(u) = \|P_0 u\|_{L_x^\infty L_{yzT}^2} + \|2^{(s+1)j} \|\Delta_j u\|_{L_x^\infty L_{yzT}^2}\|_{l^2(\mathbb{N})};$$

$$N_3(u) = \|P_0 u\|_{L_x^2 L_{yzT}^\infty} + \|2^{(s-(1+))j} \|\Delta_j u\|_{L_x^2 L_{yzT}^\infty}\|_{l^2(\mathbb{N})},$$

e consideremos o seguinte espaço

$$X_T = \{u \in C([0, T], H^s(\mathbb{R})); \|u\| < \infty\},$$

onde

$$\|u\| = \sum_{i=1}^3 N_i(u).$$

Considere ainda

$$X_T(a) = \{u \in C([0, T], H^s(\mathbb{R})); \|u\| \leq a\}.$$

Provaremos na Seção 3.2 que, para a e T convenientes, valerá:

i) $\Psi(X_T(a)) \subseteq X_T(a)$;

ii) $\|\Psi(u) - \Psi(v)\| \leq \frac{1}{2} \|u - v\|$ para todo $u, v \in X_T(a)$, sempre que $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^n)$ para todo $s > \frac{3}{2} - \frac{2}{k}$.

Observação 3.1 *Pode-se verificar que $X_T(a)$ é um espaço métrico completo com respeito à métrica dada pela norma $\|\cdot\|$.*

3.1 Estimativas em X_T

Nesta seção enunciaremos e provaremos alguns resultados que serão de grande importância na demonstração do teorema de boa colocação.

Proposição 3.1 *Dado $\theta \in [0, 1]$, vale*

$$2^{\alpha(\theta)r} \|\Delta_r u\|_{L_x^{1-\theta} L_{yzT}^{\frac{2}{\theta}}} \lesssim \|\Delta_r u\|$$

onde $\alpha(\theta) = (s - 1 + 2\theta)^-$.

Demonstração: Por um lado, sabemos pela definição de $\|\cdot\|$ que

$$2^{(s-(1+))j} \|\Delta_j u\|_{L_x^2 L_{yzT}^\infty} \leq \|u\|$$

e

$$2^{(s+1)j} \|\Delta_j u\|_{L_x^\infty L_{yzT}^2} \leq \|u\|.$$

Segue usando Teorema [1.5](#), com $(p_1, q_1) = (2, \infty)$ e $(p_2, q_2) = (\infty, 2)$ que

$$\begin{aligned} \|\Delta_r u\|_{L_x^{\frac{2}{1-\theta}} L_{yzT}^{\frac{2}{\theta}}} &\leq \|\Delta_j u\|_{L_x^2 L_{yzT}^\infty}^{1-\theta} \|\Delta_j u\|_{L_x^\infty L_{yzT}^2}^\theta \\ &\leq (2^{-(s-(1+))j} \|u\|)^{1-\theta} (2^{-(s+1)j} \|u\|)^\theta \\ &\leq 2^{-\alpha(\theta)r} \|u\|. \end{aligned}$$

Agora usando o Lema [1.4](#), segue que

$$\|\Delta_r u\| = \sum_{j=r-1}^{j=r+1} \|\Delta_j \Delta_r u\| \lesssim \sum_{j=r-1}^{j=r+1} 2^{\alpha(\theta)j} \|\Delta_r u\| \lesssim 2^{\alpha(\theta)r} \|\Delta_r u\|.$$

□

Lema 3.1 Dado $u_0 \in H^s$, com $s > s_k := \frac{3}{2} - \frac{2}{k}$ e $k \geq 4$ vale a desigualdade

$$\|U(t)u_0\| \lesssim \|u_0\|_{H^s}.$$

Demonstração: De fato, pela definição de $\|\cdot\|$ sabemos que

$$\begin{aligned} \|U(t)u_0\| &= N_1(U(t)u_0) + N_2(U(t)u_0) + N_3(U(t)u_0) \\ &= \|P_0 U(t)u_0\|_{L_T^\infty L_x^2} + \|2^{sj} \|\Delta_j U(t)u_0\|_{L_T^\infty L_x^2}\|_{l^2(\mathbb{N})} \\ &\quad + \|P_0 U(t)u_0\|_{L_x^\infty L_{yzT}^2} + \|2^{(s+1)j} \|\Delta_j U(t)u_0\|_{L_x^\infty L_{yzT}^2}\|_{l^2(\mathbb{N})} \\ &\quad + \|P_0 U(t)u_0\|_{L_x^2 L_{yzT}^\infty} + \|2^{(s-(1+))j} \|\Delta_j U(t)u_0\|_{L_x^2 L_{yzT}^\infty}\|_{l^2(\mathbb{N})}. \end{aligned}$$

Agora iremos estimar cada uma das parcelas acima. Começando por $\|P_0 U(t)u_0\|_{L_T^\infty L_x^2}$ e $2^{sj} \|\Delta_j U(t)u_0\|_{L_T^\infty L_x^2}$. Como $U(t)$ é isometria em L^2 temos que

$$\|P_0 U(t)u_0\|_{L_T^\infty L_x^2} = \|U(t)P_0 u_0\|_{L_T^\infty L_x^2} = \|P_0 u_0\|_{L^2}, \quad (3.3)$$

$$2^{sj} \|\Delta_j U(t)u_0\|_{L_T^\infty L_x^2} = 2^{sj} \|U(t)\Delta_j u_0\|_{L_T^\infty L_x^2} = 2^{sj} \|\Delta_j u_0\|_{L^2}. \quad (3.4)$$

Segue de [\(3.3\)](#), [\(3.4\)](#) e da Proposição [1.2](#) que

$$N_1(U(t)u_0) \lesssim \|u_0\|_{H^s}. \quad (3.5)$$

Agora aplicando o Lema [2.1](#),

$$\|P_0 U(t)u_0\|_{L_x^\infty L_{yzT}^2} \lesssim \|P_0 u_0\|_{H^{\frac{1}{2}+}} = \|J^{\frac{1}{2}+} P_0 u_0\|_{L^2}.$$

Daí, aplicando a Proposição [1.3](#) item 3, temos

$$\|P_0 U(t)u_0\|_{L_x^\infty L_{yzT}^2} \lesssim \|J^{\frac{1}{2}+} P_0 u_0\|_{L^2} \lesssim \|P_0 u_0\|_{L^2}. \quad (3.6)$$

Aplicando a Proposição [2.2](#), temos que

$$\begin{aligned} \|\Delta_j U(t)u_0\|_{L_x^\infty L_{yzT}^2} &= \|\nabla U(t) \nabla^{-1}(\Delta_j u_0)\|_{L_x^\infty L_{yzT}^2} \\ &\lesssim \|\nabla^{-1} \Delta_j u_0\|_{L^2} \lesssim 2^{-j} \|\Delta_j u_0\|_{L^2}, \end{aligned}$$

para todo $j = 1, 2, \dots$. Logo

$$2^{(s+1)j} \|\Delta_j U(t)u_0\|_{L_x^\infty L_{yzT}^2} \lesssim 2^{sj} \|\Delta_j u_0\|_{L^2}. \quad (3.7)$$

Portanto segue de [\(3.6\)](#), [\(3.7\)](#) e da Proposição [1.2](#) que

$$N_2(U(t)u_0) \lesssim \|u_0\|_{H^s}. \quad (3.8)$$

Finalmente vamos estimar a norma N_3 . Para isso, primeiro notemos que usando a Proposição [2.5](#) e depois a Proposição [1.3](#) item 3 vale

$$\|P_0 U(t)u_0\|_{L_x^2 L_{yzT}^\infty} \lesssim \|P_0 u_0\|_{H^{1+}} \lesssim \|P_0 u_0\|_{L^2}. \quad (3.9)$$

Por fim, ainda aplicando a Proposição [2.5](#), obtemos

$$\|\Delta_j U(t)u_0\|_{L_x^2 L_{yzT}^\infty} \lesssim \|\Delta_j u_0\|_{H^{1+}} \lesssim 2^{j(1+)} \|\Delta_j u_0\|_{L^2}.$$

Logo,

$$2^{(s-(1+))j} \|\Delta_j U(t)u_0\|_{L_x^2 L_{yzT}^\infty} \lesssim 2^{sj} \|\Delta_j u_0\|_{L^2}. \quad (3.10)$$

Assim combinando as equações de [\(3.9\)](#), [\(3.10\)](#) e a Proposição [1.2](#), concluímos que

$$N_3(U(t)u_0) \lesssim \|u_0\|_{H^s}. \quad (3.11)$$

Isso conclui a nossa demonstração. \square

Lema 3.2 Dado $k \geq 4$ e $s \in \mathbb{R}$ e $T \in [0, 1]$, vale

$$\left\| \int_0^t U(t-\tau) \partial_x(u^{k+1}) d\tau \right\| \lesssim \|P_0(u^{k+1})\|_{L_x^1 L_{yzT}^2} + \|2^{sj} \|\Delta_j(u^{k+1})\|_{L_x^1 L_{yzT}^2}\|_{l^2(\mathbb{N})}.$$

Demonstração: De fato, pela definição de $\|\cdot\|$ sabemos que

$$\begin{aligned}
 \left\| \int_0^t U(t-\tau) \partial_x(u^{k+1}) d\tau \right\| &= \sum_{i=1}^3 N_i \left(\int_0^t U(t-\tau) \partial_x(u^{k+1}) d\tau \right) \\
 &= \|P_0 \int_0^t U(t-\tau) \partial_x(u^{k+1}) d\tau\|_{L_T^\infty L_x^2} \\
 &\quad + \|2^{sj} \|\Delta_j \int_0^t U(t-\tau) \partial_x(u^{k+1}) d\tau\|_{L_T^\infty L_x^2}\|_{l^2(\mathbb{N})} \\
 &\quad + \|P_0 \int_0^t U(t-\tau) \partial_x(u^{k+1}) d\tau\|_{L_x^\infty L_{yzT}^2} \\
 &\quad + \|2^{(s+1)j} \|\Delta_j \int_0^t U(t-\tau) \partial_x(u^{k+1}) d\tau\|_{L_x^\infty L_{yzT}^2}\|_{l^2(\mathbb{N})} \\
 &\quad + \|P_0 \int_0^t U(t-\tau) \partial_x(u^{k+1}) d\tau\|_{L_x^2 L_{yzT}^\infty} \\
 &\quad + \|2^{(s-(1+))j} \|\Delta_j \int_0^t U(t-\tau) \partial_x(u^{k+1}) d\tau\|_{L_x^2 L_{yzT}^\infty}\|_{l^2(\mathbb{N})}.
 \end{aligned}$$

Agora iremos estimar cada uma das parcelas acima. Aplicando a Proposição [2.3](#) obtemos

$$\begin{aligned}
 \|P_0 \int_0^t U(t-\tau) \partial_x(u^{k+1}) d\tau\|_{L_T^\infty L_x^2} &= \|\partial_x \int_0^t U(t-\tau) P_0(u^{k+1}) d\tau\|_{L_T^\infty L_x^2} \\
 &\lesssim \|P_0(u^{k+1})\|_{L_x^1 L_{yzT}^2}
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

e

$$\begin{aligned}
 2^{sj} \|\Delta_j \int_0^t U(t-\tau) \partial_x(u^{k+1}) d\tau\|_{L_T^\infty L_x^2} &= 2^{sj} \|\partial_x \int_0^t U(t-\tau) \Delta_j(u^{k+1}) d\tau\|_{L_T^\infty L_x^2} \\
 &\lesssim 2^{sj} \|\Delta_j(u^{k+1})\|_{L_x^1 L_{yzT}^2}.
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

Combinando [\(3.12\)](#) e [\(3.13\)](#), concluímos

$$N_1 \left(\int_0^t U(t-\tau) \partial_x(u^{k+1}) d\tau \right) \lesssim \|P_0(u^{k+1})\|_{L_x^1 L_{yzT}^2} + \|2^{sj} \|\Delta_j(u^{k+1})\|_{L_x^1 L_{yzT}^2}\|_{l^2(\mathbb{N})}. \tag{3.14}$$

Aplicando o Lema [1.2](#), temos

$$\|P_0 \int_0^t U(t-\tau) \partial_x(u^{k+1}) d\tau\|_{L_x^\infty L_{yzT}^2} \leq \|P_0 \int_0^t U(t-\tau) \partial_x(u^{k+1}) d\tau\|_{L_{yzT}^2 L_x^\infty}. \tag{3.15}$$

Aplicando a Imersão de Sobolev

$$\begin{aligned}
 \|P_0 \int_0^t U(t-\tau) \partial_x(u^{k+1}) d\tau\|_{L_{yzT}^2 L_x^\infty} &\lesssim \|P_0 \int_0^t U(t-\tau) \partial_x(u^{k+1}) d\tau\|_{L_{yzT}^2 H^s} \\
 &\lesssim \|P_0 \int_0^t U(t-\tau) \partial_x(u^{k+1}) d\tau\|_{L_T^2 \bar{x}} \\
 &\lesssim T^{\frac{1}{2}} \|P_0 \int_0^t U(t-\tau) \partial_x(u^{k+1}) d\tau\|_{L_T^\infty L_x^2} \\
 &= T^{\frac{1}{2}} \|\partial_x \int_0^t U(t-\tau) P_0(u^{k+1}) d\tau\|_{L_T^\infty L_x^2}.
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

Daí aplicando a Proposição [2.3](#), temos

$$\|P_0 \int_0^t U(t-\tau) \partial_x(u^{k+1}) d\tau\|_{L_{yzT}^2 L_x^\infty} \lesssim \|P_0(u^{k+1})\|_{L_x^1 L_{yzT}^2} \quad (3.17)$$

Agora aplicando a Proposição [2.4](#), obtemos

$$\begin{aligned} 2^{(s+1)j} \|\Delta_j \int_0^t U(t-\tau) \partial_x(u^{k+1}) d\tau\|_{L_x^\infty L_{yzT}^2} &= 2^{(s+1)j} \|\partial_x^2 \int_0^t U(t-\tau) \partial_x^{-1} \Delta_j(u^{k+1}) d\tau\|_{L_x^\infty L_{yzT}^2} \\ &\lesssim 2^{(s+1)j} \|\partial_x^{-1} \Delta_j(u^{k+1}) d\tau\|_{L_x^1 L_{yzT}^2} \\ &\lesssim 2^{(s+1)j} 2^{-j} \|\Delta_j(u^{k+1})\|_{L_x^1 L_{yzT}^2} \\ &= 2^{sj} \|\Delta_j(u^{k+1})\|_{L_x^1 L_{yzT}^2}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Combinando [\(3.17\)](#) e [\(3.18\)](#), concluímos

$$N_2 \left(\int_0^t U(t-\tau) \partial_x(u^{k+1}) d\tau \right) \lesssim \|P_0(u^{k+1})\|_{L_x^1 L_{yzT}^2} + \|2^{sj} \|\Delta_j(u^{k+1})\|_{L_x^1 L_{yzT}^2}\|_{l^2(\mathbb{N})}. \quad (3.19)$$

Finalmente trataremos da estimativa para a norma N_3 . Primeiramente, usando o Lema [2.2](#), temos

$$\|P_0 \int_0^t U(t-\tau) \partial_x(u^{k+1}) d\tau\|_{L_x^2 L_{yzT}^\infty} \lesssim \|P_0 \partial_x(u^{k+1})\|_{L_x^1 L_{yzT}^2}.$$

Agora aplicando o Lema [1.6](#), temos

$$\|P_0 \partial_x(u^{k+1})\|_{L_x^1 L_{yzT}^2} = \|\partial_x P_0(u^{k+1})\|_{L_x^1 L_{yzT}^2} \lesssim \|P_0(u^{k+1})\|_{L_x^1 L_{yzT}^2}$$

com isso, concluímos que

$$\|P_0 \int_0^t U(t-\tau) \partial_x(u^{k+1}) d\tau\|_{L_x^2 L_{yzT}^\infty} \lesssim \|P_0(u^{k+1})\|_{L_x^1 L_{yzT}^2} \quad (3.20)$$

Ainda pelo Lema [2.2](#), temos

$$\begin{aligned} 2^{(s-(1+))j} \|\Delta_j \int_0^t U(t-\tau) \partial_x(u^{k+1}) d\tau\|_{L_x^2 L_{yzT}^\infty} &\lesssim 2^{(s-(1+))j} \|\Delta_j \partial_x(u^{k+1})\|_{L_x^1 L_{yzT}^2} \\ &\lesssim 2^{(s-(1+))j} 2^{j+} \|\Delta_j(u^{k+1})\|_{L_x^1 L_{yzT}^2} \\ &\lesssim 2^{sj} \|\Delta_j(u^{k+1})\|_{L_x^1 L_{yzT}^2}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Combinando [\(3.20\)](#) e [\(3.21\)](#), temos

$$N_3 \left(\int_0^t U(t-\tau) \partial_x(u^{k+1}) d\tau \right) \lesssim \|P_0(u^{k+1})\|_{L_x^1 L_{yzT}^2} + \|2^{sj} \|\Delta_j(u^{k+1})\|_{L_x^1 L_{yzT}^2}\|_{l^2(\mathbb{N})}. \quad (3.22)$$

Isso finaliza nossa demonstração. \square

Lema 3.3 Dado $k \geq 4$ e $s > \frac{3}{2} - \frac{2}{k}$, vale

$$\|P_0(u^{k+1})\|_{L_x^1 L_{yzT}^2} + \|2^{sj} \Delta_j(u^{k+1})\|_{L_x^1 L_{yzT}^2} \|l^2(\mathbb{N})\| \lesssim T^{0+} \|u\|^{k+1}$$

Demonstração: De fato, observe que

$$\begin{aligned} \Delta_j(u^{k+1}) &= \lim_{r \rightarrow +\infty} \Delta_j(P_r u)^{k+1} \\ &= \Delta_j \left(\sum_{r=0}^{+\infty} [(P_{r+1}u)^{k+1} - (P_r u)^{k+1}] \right) + \Delta_j(P_0(u^{k+1})) \\ &= \Delta_j \left(\sum_{r=0}^{+\infty} \Delta_{r+1}u \left(\sum_{l=0}^k (P_{r+1}u)^{k-l} (P_r u)^l \right) \right) + \Delta_j(P_0(u^{k+1})). \end{aligned}$$

Observando o suporte de Δ_r no somatório, segue que

$$\Delta_j(u^{k+1}) = \Delta_j \left(\sum_{r \geq j+1} \Delta_{r+1}u \left(\sum_{l=0}^k (P_{r+1}u)^{k-l} (P_r u)^l \right) \right) + \Delta_j(P_0(u^{k+1})). \quad (3.23)$$

Daí,

$$\begin{aligned} \|\Delta_j(u^{k+1})\|_{L_x^1 L_{yzT}^2} &= \left\| \sum_{r \geq j+1} \Delta_{r+1}u \left(\sum_{l=0}^k (P_{r+1}u)^{k-l} (P_r u)^l \right) + \Delta_j(P_0(u^{k+1})) \right\|_{L_x^1 L_{yzT}^2} \\ &\leq \sum_{r \geq j+1} \sum_{l=0}^k \|\Delta_{r+1}u (P_{r+1}u)^{k-l} (P_r u)^l\|_{L_x^1 L_{yzT}^2} + \|\Delta_j(P_0(u^{k+1}))\|_{L_x^1 L_{yzT}^2}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Agora analisaremos $\|\Delta_{r+1}u (P_{r+1}u)^{k-l} (P_r u)^l\|_{L_x^1 L_{yzT}^2}$, aplicando a desigualdade de Hölder, temos

$$\|\Delta_{r+1}u (P_{r+1}u)^{k-l} (P_r u)^l\|_{L_x^1 L_{yzT}^2} \leq \|\Delta_{r+1}u\|_{L_x^{A_1} L_{yzT}^{B_1}} \|(P_{r+1}u)^{k-l} (P_r u)^l\|_{L_x^{A_2} L_{yzT}^{B_2}}, \quad (3.25)$$

para quaisquer pares (A_1, A_2) e (B_1, B_2) satisfazendo

$$\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} = 1, \quad \frac{1}{B_1} + \frac{1}{B_2} = \frac{1}{2}.$$

Usando que $x^a y^b \leq \frac{a}{k} x^k + \frac{b}{k} y^k$ sempre que $a + b = k$, temos

$$(P_{r+1}u)^{k-l} (P_r u)^l \leq \frac{k-l}{k} (P_{r+1}u)^k + \frac{l}{k} (P_r u)^k. \quad (3.26)$$

Assim concluímos que

$$\|(P_{r+1}u)^{k-l} (P_r u)^l\|_{L_x^{A_2} L_{yzT}^{B_2}} \leq \frac{k-l}{k} \|(P_{r+1}u)\|_{L_x^{kA_2} L_{yzT}^{kB_2}}^k + \frac{l}{k} \|(P_r u)\|_{L_x^{kA_2} L_{yzT}^{kB_2}}^k. \quad (3.27)$$

Utilizando a Proposição 3.1 com $\theta = \frac{1}{2}+$ e escolhendo $(A_1, A_2) = (4+, \frac{4}{3}-)$ e $(B_1, B_2) = (4-, 4+)$, concluímos de (3.25) e (3.27) que

$$\|\Delta_{r+1}u(P_{r+1}u)^{k-l}(P_ru)^l\|_{L_x^1L_{yzT}^2} \lesssim 2^{-sr} \|\Delta_ru\| \|P_ru\|_{L_x^{\frac{4k}{3}-}L_{yzT}^{4k+}}^k + 2^{-sr} \|\Delta_ru\| \|P_{r+1}u\|_{L_x^{\frac{4k}{3}-}L_{yzT}^{4k+}}^k.$$

Assim,

$$\begin{aligned} 2^{sj} \|\Delta_{r+1}u(P_{r+1}u)^{k-l}(P_ru)^l\|_{L_x^1L_{yzT}^2} &\lesssim \sum_{r \geq j} 2^{s(j-r)} \|\Delta_ru\| \|P_ru\|_{L_x^{\frac{4k}{3}-}L_{yzT}^{4k+}}^k \\ &\quad + \sum_{r \geq j} 2^{s(j-r)} \|\Delta_ru\| \|P_{r+1}u\|_{L_x^{\frac{4k}{3}-}L_{yzT}^{4k+}}^k. \end{aligned}$$

Agora temos que limitar $\|P_ru\|_{L_x^{\frac{4k}{3}-}L_{yzT}^{4k+}}$ e $\|P_{r+1}u\|_{L_x^{\frac{4k}{3}-}L_{yzT}^{4k+}}$. Vamos começar por $\|P_ru\|_{L_x^{\frac{4k}{3}-}L_{yzT}^{4k+}}$, como $k \geq 4$, temos $\frac{4k}{3} > \frac{4k}{2k-1}$ e podemos aplicar a desigualdade de Bernstein. Assim obtemos

$$\|\Delta_ru\|_{L_x^{\frac{4k}{3}-}L_{yzT}^{4k+}} \lesssim T^{0+} 2^{r(\frac{1}{2}-\frac{1}{k})-} \|\Delta_ru\|_{L_x^{\frac{4k}{2k-1}+}L_{yzT}^{4k+}}.$$

Agora aplicando a Proposição 3.1 com $\theta = \frac{1}{2k}$, temos que

$$\|\Delta_ru\|_{L_x^{\frac{4k}{2k-1}+}L_{yzT}^{4k+}} \lesssim 2^{-(s-1+\frac{1}{k})r} \|\Delta_lu\|$$

Daí, segue que

$$\begin{aligned} \|P_ru\|_{L_x^{\frac{4k}{3}-}L_{yzT}^{4k+}} &\lesssim T^{0+} \sum_{l=0}^r 2^{l(\frac{1}{2}-\frac{1}{k})-} \|\Delta_lu\|_{L_x^{\frac{4k}{2k-1}+}L_{yzT}^{4k+}} \\ &\lesssim T^{0+} \sum_{l=0}^r 2^{l(\frac{1}{2}-\frac{1}{k})-} 2^{-(s-1+\frac{1}{k})l} \|\Delta_lu\| \\ &= T^{0+} \sum_{l=0}^r 2^{-(s-s_k)l} \|\Delta_lu\| \\ &\lesssim T^{0+} \|u\|. \end{aligned}$$

Analogamente, temos

$$\|P_{r+1}u\|_{L_x^{\frac{4k}{3}-}L_{yzT}^{4k+}} \lesssim T^{0+} \|u\|. \quad (3.28)$$

Concluimos assim que

$$2^{sj} \|\Delta_j(u^{k+1})\|_{L_x^1L_{yzT}^2} \lesssim T^{0+} \left(\sum_{r \geq j} 2^{-s(r-j)} \|\Delta_ru\| \right) \|u\|^k.$$

Podemos ainda reescrever essa estimativa como

$$\begin{aligned} 2^{sj} \|\Delta_j(u^{k+1})\|_{L_x^1L_{yzT}^2} &\lesssim T^{0+} \left(\sum_{r \in \mathbb{N}} \chi_{\geq 0}(r-j) 2^{-s(r-j)} \|\Delta_ru\| \right) \|u\|^k \\ &= T^{0+} \left((\chi_{\geq 0} 2^{-s(\cdot)}) * \|\Delta_{(\cdot)}u\| \right) (j) \|u\|^k. \end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Young, obtemos

$$\begin{aligned} \|2^{sj}\|\Delta_j(u^{k+1})\|_{L_x^1 L_{yzT}^2} \|l^2(\mathbb{N})\| &\leq T^{0+} \|\chi_{\geq 0} 2^{-s(\cdot)}\|_{l^1(\mathbb{N})} \| \|\Delta_r u\| \|l^2(\mathbb{N})\| \|u\|^k \\ &\lesssim T^{0+} \|u\| \|u\|^k \\ &\lesssim T^{0+} \|u\|^{k+1}. \end{aligned}$$

Com isso concluímos a demonstração do Lema. \square

3.2 Boa colocação em H^s com $s > s_k = \frac{3}{2} - \frac{2}{k}$ para $k \geq 4$

Nesta seção provaremos o Teorema [3.1](#), para o caso $k > 2$ e $s > s_k = \frac{3}{2} - \frac{2}{k}$. Para isto, consideramos o espaço

$$X_T = \{u \in C([0, T], H^s(\mathbb{R})); \|u\| < \infty\}$$

e denotamos por

$$X_T(a) = \{u \in C([0, T], H^s(\mathbb{R})); \|u\| \leq a\}$$

a bola centrada na origem e raio a . Como sabemos, $X_T(a)$ é um espaço métrico completo.

Definimos em X_T o operador integral

$$\Psi(u) = u(x, t) = U(t)u_0 - \frac{1}{k+1} \int_0^t U(t-\tau) \partial_x(u^{k+1}) d\tau. \quad (3.29)$$

Como já falamos antes o objetivo é mostrar que $\Psi(u)$ tem um ponto fixo. Garantiremos a existência do ponto fixo provando que $\Psi(X_T) \subseteq X_T$ e que $\Psi : X_T \rightarrow X_T$ é uma contração.

Primeiramente, veja que

$$\begin{aligned} \|\Psi(u)\| &= \left\| U(t)u_0 - \frac{1}{k+1} \int_0^t U(t-\tau) \partial_x(u^{k+1}) d\tau \right\| \\ &\leq \|U(t)u_0\| + \left\| \int_0^t U(t-\tau) \partial_x(u^{k+1}) d\tau \right\|. \end{aligned}$$

Aplicando o Lema [3.1](#) e o Lema [3.2](#), podemos concluir que

$$\|\Psi(u)\| \lesssim \|u_0\|_{H^s} + \|2^{sj}\|\Delta_j(u^{k+1})\|_{L_x^1 L_{yzT}^2} \|l^2(\mathbb{N})\|.$$

Daí, aplicando o Lema [3.3](#), concluímos que

$$\|\Psi(u)\| \leq c \|u_0\|_{H^s} + cT^{0+} \|u\|^{k+1},$$

para todo $s > s_k = \frac{3}{2} - \frac{2}{k}$ e para $k \geq 4$ e para alguma constante $c > 0$.

Agora provaremos que $\|\Psi(u) - \Psi(v)\| \lesssim T^{0+} \|u - v\| (\|u\|^k + \|v\|^k)$ para todo $u, v \in X_T$. Com efeito, dados $u, v \in X_T$, temos

$$\begin{aligned} \|\Psi(u) - \Psi(v)\| &= \left\| U(t)u_0 - \frac{1}{k+1} \int_0^t U(t-\tau) \partial_x(u^{k+1}) d\tau \right. \\ &\quad \left. - \left(U(t)u_0 - \frac{1}{k+1} \int_0^t U(t-\tau) \partial_x(v^{k+1}) d\tau \right) \right\| \\ &\lesssim \left\| \int_0^t U(t-\tau) \partial_x(u^{k+1}) d\tau - \int_0^t U(t-\tau) \partial_x(v^{k+1}) d\tau \right\| \\ &= \left\| \int_0^t U(t-\tau) \partial_x(u^{k+1} - v^{k+1}) d\tau \right\|. \end{aligned}$$

Aplicando o Lema 3.2, temos

$$\left\| \int_0^t U(t-\tau) \partial_x(u^{k+1} - v^{k+1}) d\tau \right\| \lesssim \|2^{sj}\| \|\Delta_j(u^{k+1} - v^{k+1})\|_{L_x^1 L_{yzT}^2} \|l^2(\mathbb{N})\|. \quad (3.30)$$

Agora estimaremos o lado direito de (3.30) de modo similar ao que foi feito na demonstração do Lema 3.3. A única diferença que agora nos preocuparemos em fazer aparecer $\|u - v\|$ nas estimativas.

$$\begin{aligned} \Delta_j(u^{k+1} - v^{k+1}) &= \lim_{r \rightarrow +\infty} \Delta_j [(P_r u)^{k+1} - (P_r v)^{k+1}] \\ &= \Delta_j \left(\sum_{r=0}^{+\infty} [(P_{r+1} u)^{k+1} - (P_{r+1} v)^{k+1} - (P_r u)^{k+1} + (P_r v)^{k+1}] \right) \\ &= \Delta_j \sum_{r=0}^{+\infty} \Delta_{r+1} u \left(\sum_{l=0}^k (P_{r+1} u)^{k-l} (P_r u)^l \right) \\ &\quad - \Delta_j \sum_{r=0}^{+\infty} \Delta_{r+1} v \left(\sum_{l=0}^k (P_{r+1} v)^{k-l} (P_r v)^l \right) \\ &= \Delta_j \sum_{r=0}^{+\infty} \Delta_{r+1} (u - v) \left(\sum_{l=0}^k (P_{r+1} u)^{k-l} (P_r u)^l \right) \\ &\quad + \Delta_j \sum_{r=0}^{+\infty} \Delta_{r+1} v \sum_{l=0}^k [(P_{r+1} u)^{k-l} (P_r u)^l - (P_{r+1} v)^{k-l} (P_r v)^l]. \end{aligned}$$

A análise de $\Delta_j \left[\sum_{r=0}^{+\infty} \Delta_{r+1} (u - v) \left(\sum_{l=0}^k (P_{r+1} u)^{k-l} (P_r u)^l \right) \right]$ segue exatamente o mesmo raciocínio empregado para tratar $\Delta_j \left(\sum_{r=0}^{+\infty} \Delta_{r+1} u \left(\sum_{l=0}^k (P_{r+1} u)^{k-l} (P_r u)^l \right) \right)$ e portanto pode-se concluir que

$$\left\| \Delta_j \sum_{r=0}^{+\infty} \Delta_{r+1} (u - v) \left(\sum_{l=0}^k (P_{r+1} u)^{k-l} (P_r u)^l \right) \right\|_{L_x^1 L_{yzT}^2} \lesssim T^{0+} \|u - v\| \|u\|^k.$$

Agora, para tratar $\sum_{r=0}^{+\infty} \Delta_{r+1} v \sum_{l=0}^k [(P_{r+1}u)^{k-l}(P_r u)^l - (P_{r+1}v)^{k-l}(P_r v)^l]$, usaremos a seguinte notação:

$$c_l = \sum_{r=0}^{+\infty} \Delta_{r+1} v \sum_{l=0}^k [(P_{r+1}u)^{k-l}(P_r u)^l - (P_{r+1}v)^{k-l}(P_r v)^l]. \quad (3.31)$$

Fazendo $l = 0$ em (3.31), temos

$$\begin{aligned} c_0 &= \sum_{r=0}^{+\infty} \Delta_{r+1} v [(P_{r+1}u)^k - (P_{r+1}v)^k] \\ &= \sum_{r=0}^{+\infty} \Delta_{r+1} v (P_{r+1}u - P_{r+1}v) [(P_{r+1}u)^{k-1} + (P_{r+1}u)^{k-2}(P_{r+1}v) + \cdots + (P_{r+1}v)^{k-1}] \\ &= \sum_{r=0}^{+\infty} \Delta_{r+1} v P_{r+1} (u - v) \sum_{m=0}^{k-1} (P_{r+1}u)^{k-1-m} (P_{r+1}v)^m. \end{aligned}$$

Analogamente, fazendo $l = k$ em (3.31), temos

$$c_k = \sum_{r=0}^{+\infty} \Delta_{r+1} v P_r (u - v) \sum_{m=0}^{k-1} (P_r u)^{k-1-m} (P_r v)^m. \quad (3.32)$$

Agora, para $1 \leq l \leq k - 1$ temos,

$$\begin{aligned} c_l &= \sum_{r=0}^{+\infty} \Delta_{r+1} v [(P_{r+1}u)^{k-l}(P_r u)^l - (P_{r+1}v)^{k-l}(P_r v)^l] \\ &= \sum_{r=0}^{+\infty} \Delta_{r+1} v ([(P_{r+1}u)^{k-l} - (P_{r+1}v)^{k-l}] (P_r u)^l + (P_{r+1}v)^{k-l} [(P_r u)^l - (P_r v)^l]). \end{aligned} \quad (3.33)$$

Como já vimos

$$(P_{r+1}u)^{k-l} - (P_{r+1}v)^{k-l} = P_{r+1}(u - v) \left[\sum_{a=0}^{k-1-l} (P_{r+1}u)^{k-1-l-a} (P_{r+1}v)^a \right]. \quad (3.34)$$

Logo,

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^{+\infty} \Delta_{r+1} v \sum_{l=1}^{k-1} [(P_{r+1}u)^{k-l} - (P_{r+1}v)^{k-l}] (P_r u)^l &= \sum_{r=0}^{+\infty} \Delta_{r+1} v \sum_{l=1}^{k-1} P_{r+1} (u - v) \\ &\quad \left(\sum_{a=0}^{k-1-l} (P_{r+1}u)^{k-1-l-a} (P_{r+1}v)^a (P_r u)^l \right). \end{aligned} \quad (3.35)$$

De modo similar

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^{+\infty} \Delta_{r+1} v \sum_{l=1}^{k-1} (P_{r+1}v)^{k-l} [(P_r u)^l - (P_r v)^l] &= \sum_{r=0}^{+\infty} \Delta_{r+1} v \sum_{l=1}^{k-1} P_r (u - v) \\ &\quad \left(\sum_{a=0}^{l-1} (P_r u)^{l-1-a} (P_r v)^a (P_{r+1}v)^{k-l} \right). \end{aligned} \quad (3.36)$$

Portanto, para $1 \leq l \leq k-1$, temos

$$\begin{aligned}
 c_l &= \sum_{r=0}^{+\infty} \Delta_{r+1} v \sum_{l=1}^{k-1} [P_{r+1}(u-v) \sum_{a=0}^{k-1-l} (P_{r+1}u)^{k-1-l-a} (P_{r+1}v)^a] (P_r u)^l \\
 &+ \sum_{r=0}^{+\infty} \Delta_{r+1} v \sum_{l=1}^{k-1} [P_r(u-v) \sum_{a=0}^{l-1} (P_r u)^{l-1-a} (P_r v)^a] (P_{r+1}v)^{k-l}.
 \end{aligned} \tag{3.37}$$

Vamos analisar $\|c_l\|_{L_x^1 L_{yzT}^2}$ para cada $0 \leq l \leq k$. Para $l=0$ temos

$$\begin{aligned}
 \|c_0\|_{L_x^1 L_{yzT}^2} &= \left\| \sum_{r=0}^{+\infty} \Delta_{r+1} v P_{r+1}(u-v) \sum_{a=0}^{k-1} (P_{r+1}u)^{k-1-a} (P_{r+1}v)^a \right\|_{L_x^1 L_{yzT}^2} \\
 &\leq \sum_{r=0}^{+\infty} \sum_{a=0}^{k-1} \left\| \Delta_{r+1} v P_{r+1}(u-v) (P_{r+1}u)^{k-1-a} (P_{r+1}v)^a \right\|_{L_x^1 L_{yzT}^2} \\
 &= \sum_{r=0}^{+\infty} \left\| \Delta_{r+1} v P_{r+1}(u-v) (P_{r+1}u)^{k-1} \right\|_{L_x^1 L_{yzT}^2} \\
 &+ \sum_{r=0}^{+\infty} \left\| \Delta_{r+1} v P_{r+1}(u-v) (P_{r+1}u)^{k-2} (P_{r+1}v) \right\|_{L_x^1 L_{yzT}^2} \\
 &\quad \cdot \\
 &\quad \cdot \\
 &\quad \cdot \\
 &+ \sum_{r=0}^{+\infty} \left\| \Delta_{r+1} v P_{r+1}(u-v) (P_{r+1}v)^{k-1} \right\|_{L_x^1 L_{yzT}^2} \\
 &:= c_{0,0} + c_{0,1} + \cdots + c_{0,k-1}.
 \end{aligned} \tag{3.38}$$

Usando a desigualdade de Hölder com (A, \bar{A}) e (B, \bar{B}) como na demonstração do Lema [3.3](#), obtemos

$$\|c_{0,j}\| \leq \|P_{r+1}(u-v)\|_{L_x^A L_{yzT}^B} \|\Delta_{r+1} v (P_{r+1}u)^{k-1-j} (P_{r+1}v)^j\|_{L_x^{\bar{A}} L_{yzT}^{\bar{B}}}. \tag{3.39}$$

Como $P_r(u-v) = \sum_{l=0}^r \Delta_l(u-v)$, segue aplicando o Lema [3.1](#) que

$$\begin{aligned}
 \|P_{r+1}(u-v)\|_{L_x^A L_{yzT}^B} &\leq \sum_{l=0}^{r+1} \|\Delta_l(u-v)\|_{L_x^A L_{yzT}^B} \\
 &\lesssim \sum_{l=0}^{r+1} 2^{-sr} \|\Delta_l(u-v)\|.
 \end{aligned} \tag{3.40}$$

Como, $P_{r+1}u - P_r u = \Delta_{r+1}u$, temos

$$\begin{aligned} \|\Delta_{r+1}v(P_{r+1}u)^{k-1-j}(P_{r+1}v)^j\|_{L_x^{\bar{A}}L_{yzT}^{\bar{B}}} &= \|(P_{r+1}u - P_r u)(P_{r+1}u)^{k-1-j}(P_{r+1}v)^j\|_{L_x^{\bar{A}}L_{yzT}^{\bar{B}}} \\ &\leq \|(P_{r+1}u)^{k-j}(P_{r+1}v)^j\|_{L_x^{\bar{A}}L_{yzT}^{\bar{B}}} \\ &\quad + \|(P_r u)(P_{r+1}u)^{k-1-j}(P_{r+1}v)^j\|_{L_x^{\bar{A}}L_{yzT}^{\bar{B}}}. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Usando o que $x^a y^b z^c \leq \frac{a}{k}x^k + \frac{b}{k}y^k + \frac{c}{k}z^k$ sempre que $a + b + c = k$, temos

$$(P_r u)(P_{r+1}u)^{k-1-j}(P_{r+1}v)^j \leq \frac{1}{k}(P_r u)^k + \frac{k-1-j}{k}(P_{r+1}u)^k + \frac{j}{k}(P_{r+1}v)^k. \quad (3.42)$$

Assim concluímos que

$$\begin{aligned} \|(P_r u)(P_{r+1}u)^{k-1-j}(P_{r+1}v)^j\|_{L_x^{\bar{A}}L_{yzT}^{\bar{B}}} &\leq \frac{1}{k}\|(P_r u)\|_{L_x^{\bar{A}}L_{yzT}^{\bar{B}}}^k + \frac{k-1-j}{k}\|(P_{r+1}u)\|_{L_x^{\bar{A}}L_{yzT}^{\bar{B}}}^k \\ &\quad + \frac{j}{k}\|(P_{r+1}v)\|_{L_x^{\bar{A}}L_{yzT}^{\bar{B}}}^k. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Daí, usando os mesmo argumentos da demonstração do Lema [3.3](#), temos

$$\|(P_r u)(P_{r+1}u)^{k-1-j}(P_{r+1}v)^j\|_{L_x^{\bar{A}}L_{yzT}^{\bar{B}}} \lesssim T^{0+}(\|u\|^k + \|v\|^k). \quad (3.44)$$

Com isso, concluímos que

$$\|c_0\|_{L_x^1 L_{yzT}^2} \lesssim T^{0+} \sum_{l=0}^{r+1} 2^{-sr} \|\Delta_l(u-v)\|(\|u\|^k + \|v\|^k). \quad (3.45)$$

A análise dos outros termos c_l , $1 \leq l \leq k$ é inteiramente análogo e nos dará

$$\|c_l\|_{L_x^1 L_{yzT}^2} \lesssim T^{0+} \sum_{l=0}^{r+1} 2^{-sr} \|\Delta_l(u-v)\|(\|u\|^k + \|v\|^k). \quad (3.46)$$

Com isso, concluímos que

$$2^{sj} \|\Delta_j(u^{k+1} - v^{k+1})\|_{L_x^1 L_{yzT}^2} \lesssim T^{0+} \sum_{r \geq j} 2^{-s(r-j)} \|\Delta_l(u-v)\|(\|u\|^k + \|v\|^k). \quad (3.47)$$

Usando a desigualdade de Young, tal como na demonstração do Lema [3.3](#), concluímos

que

$$\|2^{sj} \|\Delta_j(u^{k+1} - v^{k+1})\|_{L_x^1 L_{yzT}^2}\|_{l^2(\mathbb{N})} \lesssim T^{0+} \|u-v\|(\|u\|^k + \|v\|^k). \quad (3.48)$$

Com isso, concluímos que

$$\begin{aligned} \|\Psi(u) - \Psi(v)\| &\lesssim T^{0+} \|u-v\|(\|u\|^k + \|v\|^k) \\ &\lesssim 2a^k T^{0+} \|u-v\| \end{aligned} \quad (3.49)$$

Escolhendo T suficientemente pequeno concluímos que Ψ é uma contração em $X_T(a)$.

Veremos agora a dependência contínua em relação aos dados iniciais. Para isto, sejam $u, v \in X_T(a)$ e as respectivas condições iniciais, u_0 e v_0 , temos

$$\begin{aligned} \|\Psi(u) - \Psi(v)\| &= \left\| U(t)u_0 - \int_0^t U(t-\tau)\partial_x(u^{k+1})d\tau \right. \\ &\quad \left. - U(t)v_0 - \int_0^t U(t-\tau)\partial_x(v^{k+1})d\tau \right\| \\ &\leq \|U(t)u_0 - U(t)v_0\| + \left\| \int_0^t U(t-\tau)\partial_x(u^{k+1} - v^{k+1})d\tau \right\| \\ &\lesssim \|u_0 - v_0\|_{H^s} + T^{0+}\|u - v\|(\|u\|^k + \|v\|^k). \end{aligned} \tag{3.50}$$

Como, $u = \Psi(u)$ e $v = \Psi(v)$, temos que

$$\|u - v\| \lesssim \|u_0 - v_0\|_{H^s} + T^{0+}\|u - v\|(\|u\|^k + \|v\|^k).$$

Como, $\|u\|, \|v\| \leq a$, segue que

$$\|u - v\|(1 - 2ca^kT^{0+}) \leq \|u_0 - v_0\|_{H^s},$$

para alguma constante $c > 0$. Considerando T suficientemente pequeno tal que

$$1 - 2ca^kT^{0+} \geq \frac{1}{2},$$

segue que

$$\|u - v\| \leq 2\|u_0 - v_0\|_{H^s}.$$

Isso mostra que a aplicação

$$u_0 \in H^s \mapsto u \in X_T(a)$$

é Lipschitziana.

O que conclui a nossa demonstração.

Capítulo 4

Má colocação

O objetivo deste capítulo é provar que o P.V.I (2) é mal posto para dados iniciais em $H^s(\mathbb{R}^3)$ com índice $s = s_k = \frac{3}{2} - \frac{2}{k}$. Provaremos que a aplicação dada a solução

$$u_0 \in H^{s_k}(\mathbb{R}^3) \mapsto u \in C^0([0, T]; H^{s_k}(\mathbb{R})),$$

não é contínua. Mais precisamente, encontraremos uma sequência de dados iniciais

$$(\phi_n) \subseteq H^{s_k}(\mathbb{R}^3)$$

tais que,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\phi_n - \phi_{n+1}\|_{H_k^s} \rightarrow 0,$$

mas que a família de soluções $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ correspondente aos dados iniciais satisfaça

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_{n+1}(t, \cdot) - u_n(t, \cdot)\|_{L_T^\infty H_x^{s_k}} \neq 0.$$

Para tal finalidade procuremos soluções do tipo "onda viajante"

$$u_c(\bar{x}, t) = \varphi(x - ct, y, z). \quad (4.1)$$

Observação 4.1 *A expressão de u_c nos diz que o perfil φ "viaja" com velocidade c em relação à primeira variável quando t evolui.*

Veja que

$$\begin{aligned} \partial_t u_c + \partial_x \Delta u_c + u_c^k \partial_x u_c &= \partial_t u_c + \partial_x \left(\Delta u_c + \frac{1}{k+1} u_c^{k+1} \right) \\ &= -c\varphi(x - ct, y, z) + \Delta\varphi(x - ct, y, z) + \frac{1}{k+1} \varphi^{k+1}(x - ct, y, z). \end{aligned}$$

Assim, se φ satisfizer a equação elíptica

$$-c\varphi + \Delta\varphi + \frac{1}{k+1}\varphi^{k+1} = 0, \quad (4.2)$$

então u_c será solução da (gZK). Assumimos que a equação

$$-c\varphi + \Delta\varphi + \frac{1}{k+1}\varphi^{k+1} = 0$$

possui uma solução radial e positiva, que denotaremos por φ_1 . Para mais detalhes ver [1].

Observe que se definirmos

$$\varphi_c(\bar{x}) := c^{\frac{1}{k}}\varphi_1(\sqrt{c\bar{x}}), \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^3,$$

então φ_c é solução de (4.2) para cada $c \in \mathbb{R}$.

Antes de prosseguir, observemos que

$$\|D_x^s \varphi_c\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = c^{\frac{1}{2}(s-s_k)} \|D^s \varphi_1\|_{L^2}.$$

De fato, pela identidade de Plancherel

$$\begin{aligned} \|D^s \varphi_c\|_{L^2}^2 &= \|\bar{|\xi|^s \widehat{\varphi}_c}\|_{L^2}^2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} |\bar{\xi}|^{2s} |\widehat{\varphi}_c(\bar{\xi})|^2 d\bar{\xi}. \end{aligned}$$

Usando a Proposição 1.1 item 5, temos que

$$\widehat{\varphi}_c(\bar{\xi}) = c^{\frac{1}{k}-\frac{3}{2}} \widehat{\varphi}_1(c^{-\frac{1}{2}}\bar{\xi}). \quad (4.3)$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} |\bar{\xi}|^{2s} |\widehat{\varphi}_c(\bar{\xi})|^2 d\bar{\xi} &= c^{\frac{2}{k}-3} \int_{\mathbb{R}^3} |\bar{\xi}|^{2s} |\widehat{\varphi}_1(c^{-\frac{1}{2}}\bar{\xi})|^2 d\bar{\xi} \\ &= c^{s+\frac{2}{k}-3} \int_{\mathbb{R}^3} |c^{-\frac{1}{2}}\bar{\xi}|^{2s} |\widehat{\varphi}_1(c^{-\frac{1}{2}}\bar{\xi})|^2 d\bar{\xi}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Usando o Teorema de mudança de variáveis em (4.4), concluímos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} |\bar{\xi}|^{2s} \widehat{\varphi}_c(\bar{\xi})^2 d\bar{\xi} &= c^{s+\frac{2}{k}-3} c^{\frac{3}{2}} \int_{\mathbb{R}^3} |\bar{\xi}|^{2s} |\widehat{\varphi}_1(\bar{\xi})|^2 d\bar{\xi} \\ &= c^{s-s_k} \|D^s \varphi_1\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2. \end{aligned}$$

Logo,

$$\|D^s \varphi_c\|_{L^2} = c^{\frac{1}{2}(s-s_k)} \|D^s \varphi_1\|_{L^2}. \quad (4.5)$$

Em particular para $s = s_k$ temos

$$\|D^{s_k} \varphi_c\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = \|D^{s_k} \varphi_1\|_{L^2},$$

para todo $c \in \mathbb{R}$.

Provaremos aqui o seguinte Teorema.

Teorema 4.1 *Seja $s_k = \frac{3}{2} - \frac{2}{k}$, com $k \geq 2$. Então o P.V.I (2) é mal posto em $H^{s_k}(\mathbb{R}^3)$*

Demonstração: Para isso, provaremos que

$$\lim_{c \rightarrow +\infty} \|D^{s_k} \varphi_{c+1} - D^{s_k} \varphi_c\|_{L^2} \rightarrow 0, \quad (4.6)$$

ao passo que as correspondentes soluções

$$u_{c+1}(\bar{x}, t) = \varphi_{c+1}(x - (c+1)t, y, z)$$

$$u_c(\bar{x}, t) = \varphi_c(x - ct, y, z)$$

satisfazem

$$\lim_{c \rightarrow +\infty} \sup_{t \in \mathbb{R}} \|D^{s_k} u_{c+1}(t) - D^{s_k} u_c(t)\|_{L^2} \rightarrow 0. \quad (4.7)$$

De fato, veja que

$$\|D^{s_k} \varphi_{c+1} - D^{s_k} \varphi_c\|_{L^2}^2 = \|D^{s_k} \varphi_{c+1}\|_{L^2}^2 + \|D^{s_k} \varphi_c\|_{L^2}^2 - 2 \operatorname{Re} \langle D^{s_k} \varphi_{c+1}, D^{s_k} \varphi_c \rangle_{L^2}. \quad (4.8)$$

Mas,

$$\langle D^{s_k} \varphi_{c+1}, D^{s_k} \varphi_c \rangle_{L^2} = \int_{\mathbb{R}^3} |\bar{\xi}|^{2s_k} \widehat{\varphi}_{c+1}(\bar{\xi}) \overline{\widehat{\varphi}_c(\bar{\xi})} d\bar{\xi}.$$

Segue usando (4.3) no integrando que

$$\langle D^{s_k} \varphi_{c+1}, D^{s_k} \varphi_c \rangle_{L^2} = ((c+1)c)^{\frac{1}{k} - \frac{3}{2}} \int_{\mathbb{R}^3} |\bar{\xi}|^{2s_k} \widehat{\varphi}_1\left(\frac{\bar{\xi}}{\sqrt{c+1}}\right) \overline{\widehat{\varphi}_1\left(\frac{\bar{\xi}}{\sqrt{c}}\right)} d\bar{\xi}. \quad (4.9)$$

Usando novamente o teorema de mudança de variáveis, concluímos que a integral em (4.9) fica

$$(c+1)^{s_k + \frac{3}{2}} \int_{\mathbb{R}^3} |\bar{\xi}|^{2s_k} \widehat{\varphi}_1(\bar{\xi}) \overline{\widehat{\varphi}_1\left(\sqrt{\frac{c}{c+1}} \bar{\xi}\right)} d\bar{\xi}. \quad (4.10)$$

Substituindo (4.10) em (4.9), concluímos que

$$\langle D^{s_k} \varphi_{c+1}, D^{s_k} \varphi_c \rangle_{L^2} = \left(\frac{c}{c+1}\right)^{\frac{1}{k} - \frac{3}{2}} \int_{\mathbb{R}^3} |\bar{\xi}|^{2s_k} \widehat{\varphi}_1(\bar{\xi}) \overline{\widehat{\varphi}_1\left(\sqrt{\frac{c}{c+1}} \bar{\xi}\right)} d\bar{\xi}. \quad (4.11)$$

Fazendo $c \rightarrow +\infty$ em (4.11), concluímos

$$\lim_{c \rightarrow +\infty} \langle D^{s_k} \varphi_{c+1}, D^{s_k} \varphi_c \rangle_{L^2} = \|D^{s_k} \varphi_1\|_{L^2}^2.$$

Como

$$\|D^{s_k} \varphi_{c+1}\|_{L^2}^2 = \|D^{s_k} \varphi_c\|_{L^2}^2 = \|D^{s_k} \varphi_1\|_{L^2}^2,$$

segue que

$$\lim_{c \rightarrow +\infty} \|D^{s_k} \varphi_{c+1} - D^{s_k} \varphi_c\|_{L^2}^2 = 0.$$

Para concluir que

$$\lim_{c \rightarrow +\infty} \|\varphi_{c+1} - \varphi_c\|_{H^{s_k}} = 0.$$

Nos resta provar que

$$\lim_{c \rightarrow +\infty} \|\varphi_{c+1} - \varphi_c\|_{L^2} = 0. \quad (4.12)$$

Para provar (4.12) escrevemos

$$\begin{aligned} \|\varphi_{c+1} - \varphi_c\|_{L^2}^2 &= \|\varphi_{c+1}\|_{L^2}^2 - 2\operatorname{Re}\langle \varphi_{c+1}, \varphi_c \rangle_{L^2} + \|\varphi_c\|_{L^2}^2 \\ &= \left[(c+1)^{-\frac{s_k}{2}} + c^{-\frac{s_k}{2}} \right] \|\varphi_1\|_{L^2}^2 - 2\operatorname{Re}\langle \varphi_{c+1}, \varphi_c \rangle_{L^2}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Observe que

$$\begin{aligned} \langle \varphi_{c+1}, \varphi_c \rangle_{L^2} &= \int_{\mathbb{R}^3} \widehat{\varphi_{c+1}}(\bar{\xi}) \overline{\widehat{\varphi_c}(\bar{\xi})} d\bar{\xi} \\ &= (c+1)^{\frac{1}{k} - \frac{3}{2}} c^{\frac{1}{k} - \frac{3}{2}} \int_{\mathbb{R}^3} \widehat{\varphi_1} \left((c+1)^{-\frac{1}{2}} \bar{\xi} \right) \overline{\widehat{\varphi_1}(c^{-\frac{1}{2}} \bar{\xi})} d\bar{\xi} \\ &= [(c+1)c]^{\frac{1}{k} - \frac{3}{2}} \int_{\mathbb{R}^3} \widehat{\varphi_1} \left(\frac{\bar{\xi}}{\sqrt{c+1}} \right) \overline{\widehat{\varphi_1} \left(\frac{\bar{\xi}}{\sqrt{c+1}} \sqrt{\frac{c+1}{c}} \right)} d\bar{\xi} \\ &= (c+1)^{\frac{3}{2}} (c+1)^{\frac{1}{k} - \frac{3}{2}} c^{\frac{1}{k} - \frac{3}{2}} \int_{\mathbb{R}^3} \widehat{\varphi_1}(\bar{\xi}) \overline{\widehat{\varphi_1} \left(\bar{\xi} \sqrt{\frac{c+1}{c}} \right)} d\bar{\xi}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\langle \varphi_{c+1}, \varphi_c \rangle_{L^2} = (c+1)^{\frac{1}{k} - \frac{3}{2}} c^{\frac{1}{k} - \frac{3}{2}} \int_{\mathbb{R}^3} \widehat{\varphi_1}(\bar{\xi}) \overline{\widehat{\varphi_1} \left(\bar{\xi} \sqrt{\frac{c+1}{c}} \right)} d\bar{\xi}.$$

Para $c \gg 1$ temos

$$(c+1)^{\frac{1}{k} - \frac{3}{2}} c^{\frac{1}{k} - \frac{3}{2}} \leq (2c)^{\frac{1}{k} - \frac{3}{2}} c^{\frac{1}{k} - \frac{3}{2}} = 2^{\frac{1}{k}} c^{\frac{2}{k} - \frac{3}{2}} = 2^{\frac{1}{k}} c^{-s_k} \rightarrow 0$$

quando $c \rightarrow +\infty$. Portanto,

$$\langle \varphi_{c+1}, \varphi_c \rangle_{L^2} \rightarrow 0.$$

Com isso, concluímos que

$$\lim_{c \rightarrow +\infty} \|\varphi_{c+1} - \varphi_c\|_{L^2} = 0.$$

Agora vamos provar a afirmação feita em (4.7). Como em (4.8) escrevemos primeiramente

$$\|D^{s_k} u_{c+1}(t) - D^{s_k} u_c(t)\|_{L^2}^2 = \|D^{s_k} u_{c+1}(t)\|_{L^2}^2 + \|D^{s_k} u_c(t)\|_{L^2}^2 - 2\operatorname{Re}\langle D^{s_k} u_{c+1}(t), D^{s_k} u_c(t) \rangle_{L^2}. \quad (4.14)$$

Para analisar o lado direito de (4.14), observemos primeiro que

$$\widehat{u_c(\cdot, t)}(\bar{\xi}) = c^{\frac{1}{k} - \frac{3}{2}} e^{-ict\xi} \widehat{\varphi_1} \left(\frac{\bar{\xi}}{\sqrt{c}} \right),$$

para todo $c \in \mathbb{R}$. De fato,

$$\begin{aligned} \widehat{u_c(\cdot, t)}(\bar{\xi}) &= \int_{\mathbb{R}^3} \varphi_c(x - ct, y, z) e^{-i\bar{x}\bar{\xi}} d\bar{x} \\ &= e^{-ict\xi} \int_{\mathbb{R}^3} \varphi_c(x - ct, y, z) e^{-i(x-ct)\xi} e^{-iy} e^{-iwz} dx dy dz \\ &= e^{-ict\xi} \int_{\mathbb{R}^3} \varphi_c(\bar{x}) e^{-i\bar{x}\bar{\xi}} d\bar{x} \\ &= e^{-ict\xi} \widehat{\varphi_c}(\bar{\xi}). \end{aligned}$$

Logo, como

$$\varphi_c(\bar{x}) = c^{\frac{1}{k}} \varphi_1(\bar{x}\sqrt{c}),$$

segue da Proposição 1.1 item 5 que

$$\widehat{\varphi_c}(\bar{\xi}) = c^{\frac{1}{k}} c^{-\frac{3}{2}} \widehat{\varphi_1}(\sqrt{c}^{-1}\bar{\xi}). \quad (4.15)$$

Logo,

$$\widehat{u_c(\cdot, t)}(\bar{\xi}) = c^{\frac{1}{k} - \frac{3}{2}} e^{-ict\xi} \widehat{\varphi_1} \left(\frac{\bar{\xi}}{\sqrt{c}} \right). \quad (4.16)$$

Por (4.16), temos que para quaisquer $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \langle D^{s_k} u_{c_1}(t), D^{s_k} u_{c_2}(t) \rangle_{L^2} &= (c_1 c_2)^{\frac{1}{k} - \frac{3}{2}} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-it\xi(c_1 - c_2)} |\bar{\xi}|^{2s_k} \widehat{\varphi_1} \left(\frac{\bar{\xi}}{\sqrt{c_1}} \right) \overline{\widehat{\varphi_1} \left(\frac{\bar{\xi}}{\sqrt{c_2}} \right)} d\bar{\xi} \\ &= (c_1 c_2)^{\frac{1}{k} - \frac{3}{2}} c_1^{s_k + \frac{3}{2}} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-it\xi\sqrt{c_1}(c_1 - c_2)} |\bar{\xi}|^{2s_k} \widehat{\varphi_1}(\bar{\xi}) \overline{\varphi_1 \left(\sqrt{\frac{c_1}{c_2}} \bar{\xi} \right)} d\bar{\xi} \\ &= c_1^{\frac{1}{k} + s_k} c_2^{\frac{1}{k} - \frac{3}{2}} \int_{\mathbb{R}^3} |\bar{\xi}|^{2s_k} e^{-it\xi\sqrt{c_1}(c_1 - c_2)} \widehat{\varphi_1}(\bar{\xi}) \overline{\varphi_1 \left(\sqrt{\frac{c_1}{c_2}} \bar{\xi} \right)} d\bar{\xi} \\ &= \left(\frac{c_1}{c_2} \right)^{\frac{3}{2} - \frac{1}{k}} \int_{\mathbb{R}^3} |\bar{\xi}|^{2s_k} e^{-it\xi\sqrt{c_1}(c_1 - c_2)} \widehat{\varphi_1}(\bar{\xi}) \overline{\varphi_1 \left(\sqrt{\frac{c_1}{c_2}} \bar{\xi} \right)} d\bar{\xi}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 \langle D^{s_k} u_{c+1}(t), D^{s_k} u_c(t) \rangle_{L^2} &= \left(\frac{c+1}{c} \right)^{\frac{1}{k}-\frac{3}{2}} \int_{\mathbb{R}^3} |\bar{\xi}|^{2s_k} e^{-it\xi\sqrt{c}} \widehat{\varphi_1}(\bar{\xi}) \overline{\widehat{\varphi_1}\left(\sqrt{\frac{c}{c+1}}\bar{\xi}\right)} d\bar{\xi} \\
 &= \left(\frac{c+1}{c} \right)^{\frac{1}{k}-\frac{3}{2}} \int_{\mathbb{R}^3} |\bar{\xi}|^{2s_k} e^{-it\xi\sqrt{c}} \widehat{\varphi_1}(\bar{\xi}) \overline{\widehat{\varphi_1}(\bar{\xi})} d\bar{\xi} \\
 &\quad + \left(\frac{c+1}{c} \right)^{\frac{1}{k}-\frac{3}{2}} \int_{\mathbb{R}^3} |\bar{\xi}|^{2s_k} e^{-it\xi\sqrt{c}} \widehat{\varphi_1}(\bar{\xi}) \left[\widehat{\varphi_1}\left(\sqrt{\frac{c}{c+1}}\bar{\xi}\right) - \widehat{\varphi_1}(\bar{\xi}) \right] d\bar{\xi} \\
 &= \left(\frac{c+1}{c} \right)^{\frac{1}{k}-\frac{3}{2}} \int_{\mathbb{R}^3} |\bar{\xi}|^{2s_k} e^{-it\xi\sqrt{c}} \mathcal{F}(\varphi_1 * \varphi_1)(\bar{\xi}) d\bar{\xi} \\
 &\quad + \left(\frac{c+1}{c} \right)^{\frac{1}{k}-\frac{3}{2}} \int_{\mathbb{R}^3} |\bar{\xi}|^{2s_k} e^{-it\xi\sqrt{c}} \widehat{\varphi_1}(\bar{\xi}) \left[\widehat{\varphi_1}\left(\sqrt{\frac{c}{c+1}}\bar{\xi}\right) - \widehat{\varphi_1}(\bar{\xi}) \right] d\bar{\xi} \\
 &= I_c(t) + II_c(t).
 \end{aligned}$$

Vamos analisar $I_c(t)$ e $II_c(t)$ quando $c \rightarrow +\infty$ separadamente. Por um lado, vale

$$\begin{aligned}
 I_c(t) &= \left(\frac{c+1}{c} \right)^{\frac{1}{k}-\frac{3}{2}} \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{F}(D^{s_k} \varphi_1) * (D^{s_k} \varphi_1)(\bar{\xi}) e^{-it\xi\sqrt{c}} d\bar{\xi} \\
 &= \left(\frac{c+1}{c} \right)^{\frac{1}{k}-\frac{3}{2}} (D^{s_k} \varphi_1 * D^{s_k} \varphi_1)(t\sqrt{c}, 0, 0).
 \end{aligned}$$

Logo, $I_c(t) \rightarrow 0$ quando $c \rightarrow +\infty$, para todo $t \neq 0$. Agora,

$$|II_c(t)| \leq \left(\frac{c+1}{c} \right)^{\frac{1}{k}-\frac{3}{2}} \|D^{s_k} \varphi_1\|_{L^2} \|\widehat{\varphi_1}\left(\sqrt{\frac{c}{c+1}}\bar{\xi}\right) - \widehat{\varphi_1}(\bar{\xi})\|_{L^2} \rightarrow 0,$$

quando $c \rightarrow +\infty$. Portanto,

$$\langle D^{s_k} u_{c+1}(t), D^{s_k} u_c(t) \rangle_{L^2} \rightarrow 0,$$

quando $c \rightarrow +\infty$, para todo $t \neq 0$. Fazendo $c_1 = c_2$ em [\(4.17\)](#), temos que

$$\begin{aligned}
 \|D^{s_k} u_{c+1}(t)\|_{L^2}^2 &= \int_{\mathbb{R}^3} |\bar{\xi}|^{2s_k} |\widehat{\varphi_1}(\bar{\xi})|^2 d\bar{\xi} \\
 &= \|D^{s_k} \varphi_1\|_{L^2}^2
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 \|D^{s_k} u_c(t)\|_{L^2}^2 &= \int_{\mathbb{R}^3} |\bar{\xi}|^{2s_k} |\widehat{\varphi_1}(\bar{\xi})|^2 d\bar{\xi} \\
 &= \|D^{s_k} \varphi_1\|_{L^2}^2.
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\|D^{s_k} u_{c+1}(t) - D^{s_k} u_c(t)\|_{L^2} = 2\|D^{s_k} \varphi_1\|_{L^2}^2 - 2\langle D^{s_k} u_{c+1}(t), D^{s_k} u_c(t) \rangle_{L^2} \rightarrow 2\|D^{s_k} \varphi_1\|_{L^2}^2,$$

quando $c \rightarrow +\infty$, para todo $t \neq 0$.

Isso conclui a nossa demonstração. \square

Referências Bibliográficas

- [1] Berestycki, H.; Lions, P. L.; *Nonlinear scalar fields equation*; Arch.; Rational Mech.; Anal. 82, (1983), 313 - 375.
- [2] Costa, R. E.; *O problema de Cauchy para um sistema acoplado de equações de Schrödinger com derivadas*; Dissertação de mestrado; Teresina; 2016.
- [3] Faminskii, A. V.; *The Cauchy problem for the Zakharov - Kuznetsov equation.*; Differential Equations; 1995.
- [4] Folland, G. B.; *Real analysis, Modern Techniques and their Applications.*; John Wiley & Sons; New York; 1994.
- [5] Friedlander G.; Joshi M.; *Introduction to the Theory of Distributions.*; 2nd edition; Cambridge University Press; 1998.
- [6] Grunrock, A.; *On the generalized Zakharov-Kuznetsov equation at critical regularity*; Mathematics Subject Classification. Primary: 35Q53. Secondary: 37K40.; 2010.
- [7] Iório, R.; Iório, V.M.; *Fourier Analysis and Partial Differential Equations.*; Cambridge studies in advanced mathematics 70; Cambridge University Press; 2001.
- [8] Linares, F.; Pastor, A.; *Well-posedness for the two - dimensional modified Zakharov - Kuznetsov equation.* SIAM J. Math.; Anal.; 2009.
- [9] Linares, F.; Ponce, G.; *Introduction to Nonlinear Dispersive Equations.*; Springer; New York; 2009.
- [10] Linares, F.; Saut, J.-C.; *The Cauchy problem for the 3D Zakharov - Kuznetsov equation.*; Discrete Contin.; Dyn.; Syst.; 2009.

-
- [11] Molinet, L.; Pilod, D.; *Bilinear Strichartz estimates for the ZK equation and applications*. Annales de l'Institut Henri Poincaré (C) Non Linear Analysis, Elsevier, 2015, 32 (2), pp.347-371.
- [12] Planchon, F.; *Notes de cours.*; DEA; Université Paris 6 et 13; 2005.
- [13] Ribaud, F.; Vento, S.; *A note on the Cauchy problem for the 2D generalized Zakharov - Kuznetsov equation*; C. R. Acad. SCI. Paris, Ser. I; 2012.
- [14] Ribaud, F.; Vento, S.; *Well - posedness results for the 3D Zakharov - Kuznetsov equation.*; 2011.
- [15] Zakharov, V. E.; Kuznetsov, E. A.; *On three dimensional solitons.*; Sov.; Phys.; JETP.; 1974.