



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ  
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA  
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA  
MESTRADO EM MATEMÁTICA

## **Fractais e aplicações no ensino básico**

**José Cledes Braga**

**Teresina - 2018**

**José Cledes Braga**

**Dissertação de Mestrado:**

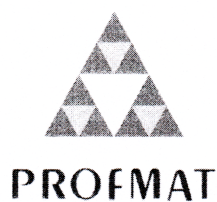
**Fractais e aplicações no ensino básico**

Dissertação submetida à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientadora:

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Liane Mendes Feitosa Soares

**Teresina - 2018**



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ  
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA  
CENTRO DE EDUCAÇÃO ABERTA E À DISTÂNCIA  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

Dissertação de Mestrado submetida à coordenação Acadêmica Institucional, na Universidade Federal do Piauí, do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional para obtenção do grau de **mestre em matemática** intitulada: **Fractais e aplicações no ensino básico**, defendida por José Cleudes Braga em 26 / 10 / 2018 e aprovada pela banca constituída pelos professores:

Presidente da Banca Examinadora

Examinador Interno

Examinador Externo ao Programa

FICHA CATALOGRÁFICA  
Universidade Federal do Piauí  
Biblioteca Comunitária Jornalista Carlos Castello Branco  
Divisão de Processos Técnicos

B813f Braga, José Cledes.  
Fractais e aplicações no ensino básico / José Cledes Braga. -- 2018.  
88 f. : il.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Piauí, Centro de Ciências da Natureza, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Teresina, 2018.

“Orientação: Prof<sup>a</sup>. Dra. Liane Mendes Feitosa Soares.”

1. Curva de Koch. 2. Dimensão fractal. 3. Matemática - Ensino Básico. 4. Geometria. I. Título.

CDD 516.15

*Dedico esse trabalho ao meu pai José Iran Braga, a minha mãe Maria Neide Braga, a minha esposa Francisca Daliane Araújo Braga e a minha orientadora Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Liane Mendes Feitosa Soares, os quais me direcionaram apoio, compreensão, dedicação e condições necessárias para a realização do mesmo.*

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por minha existência e a capacidade que Ele direcionou a mim para desenvolver este trabalho com empenho e dedicação.

Agradeço aos meus pais, pois por meio deles e intervenção celestial foi-me concedido a vida.

Aos meus professores, que me deram conhecimento para concluir esse curso, e em especial a minha orientadora Professora Dr<sup>a</sup> Liane Mendes Feitosa Soares pela disposição e contribuição na realização desse trabalho.

Agradeço aos gestores e discentes da Escola de Ensino Médio Nazaré Severiano.

Agradeço a CAPES, pelo apoio financeiro.

Agradeço, enfim, a todos que de maneira direta ou indireta contribuíram para a realização deste trabalho.

*“A Geometria Fractal fará com que você veja as coisas diferentes. É perigoso ler mais. Você arrisca perder a visão infantil de nuvens, florestas, flores, galáxias, folhas, penas, rochas, montanhas, torren-tes de água, tapetes, tijolos e muito mais. Nunca mais você interpretará estes objetos da mesma forma.”*

Michael Barnsley

# Resumo

Procuramos por meio deste trabalho salientar a importância dos fractais no que se refere à sua definição, teoria e suas aplicações na educação básica. Neste trabalho procurar-se-á mostrar o que os fractais apresentam neste campo, sua utilização, seus principais autores e possíveis aplicações nessa etapa do ensino. Neste trabalho é também destacada a definição de fractal, sua transcorrência histórica e sua utilização na sala de aula como consolidador do conhecimento. Vários exemplos de fractais naturais e matemáticos são destacados mostrando uma propriedade particular dos fractais “a autossimilaridade”. A dimensão dos fractais, assim como sua construção, é vista aqui com relevante importância, pois esta dimensão não inteira ultrapassa a topologia da geometria euclidiana, encontrando-se, por exemplo, entre zero e um, um e dois, dois e três. Neste trabalho vamos nos deter a uma aplicação com maior direcionamento ao ensino básico, buscando assim um manuseio de cálculos que não necessite do uso direto de recursos computacionais.

Palavras-Chave: Curva de Koch. Dimensão Fractal. Sequências. Contagem. Perímetros.



# Abstract

We try to highlight the importance of fractals in their definition, theory and applications in basic education. In this work we will try to show what the fractals present in this field, its use, its main authors and possible applications in this stage of teaching. In this work is also highlighted the definition of fractal, its historical transurrence and its use in the classroom as a consolidator of knowledge. Several examples of natural and mathematical fractals are highlighted showing a particular property of fractals “autosimilarity”. The dimension of the fractals, as well as their construction, is seen here with relevant importance, since this dimension is not one-dimensional beyond the topology of Euclidean geometry, for example, between zero and one, one and two, two and three. In this work we will focus on an application with a greater focus on basic education, thus seeking a handling of calculations that do not require the direct use of computational resources.

Keywords: Koch curve. Fractal Dimension. Sequences. Score. Perimeters.

# Lista de Figuras

1.1	Conjunto de Mandelbrot . . . . .	3
1.2	Conjunto de Mandelbrot ampliado . . . . .	4
1.3	Fractal de Julia Set . . . . .	5
1.4	Folhas de Acrílico . . . . .	7
1.5	Bloco de acrílico . . . . .	7
1.6	Brócolis Romanesco . . . . .	8
1.7	Conjunto de Julia . . . . .	9
1.8	Montanha Fractal . . . . .	10
2.1	Dimensão Fractal . . . . .	11
2.2	Triângulo de Sierpinski . . . . .	13
3.1	A curva de Koch . . . . .	16
3.2	A ilha de Von Koch . . . . .	19
3.3	A ilha de Von Koch ampliada . . . . .	19
3.4	O conjunto de Cantor . . . . .	26
3.5	Curva de Peano . . . . .	29
3.6	A ilha de Minkowski . . . . .	31
3.7	O triângulo de Sierpinski . . . . .	35
3.8	O triângulo de Sierpinski a partir de um quadrado . . . . .	36
3.9	O triângulo de Sierpinski/Pascal . . . . .	37
3.10	O triângulo de Sierpinski/Pascal (divisão por cinco) . . . . .	37
3.11	A esponja de Menger . . . . .	40
3.12	O tetraedro de Sierpinski . . . . .	47
4.1	Construção 1 - Aluno B . . . . .	58

---

4.2	Construção 2 - Aluno B . . . . .	59
4.3	Construção 3 - Aluno D . . . . .	60
4.4	Construção 4 - Aluno D . . . . .	61
4.5	Construção 5 - Aluno D . . . . .	62
4.6	Construção 6 - Aluno D . . . . .	63
4.7	Construção 7 - Tetraedro de Sierpinski - Aluno F . . . . .	64
5.1	Fractal gerado por computador . . . . .	67
5.2	Experimento com fractal de Mandelbrot . . . . .	68
6.1	Construção 3 - Aluno B . . . . .	75
6.2	Construção 4 - Aluno D . . . . .	76
6.3	Construção 5 - Aluno D . . . . .	77
6.4	Construção 6 - Aluno D . . . . .	78
6.5	Construção 7 - Aluno D . . . . .	79

# Sumário

<b>Resumo</b>	<b>iv</b>
<b>Abstract</b>	<b>v</b>
<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Fractal</b>	<b>2</b>
1.1 História . . . . .	3
1.2 Categorias de fractais . . . . .	4
1.3 Definições . . . . .	5
1.4 Exemplos . . . . .	7
<b>2 A dimensão de um fractal</b>	<b>11</b>
2.1 Outra forma de determinarmos a dimensão de um fractal . . . . .	13
<b>3 Fractais, contagem, perímetros, áreas, volumes e sequências.</b>	<b>15</b>
3.1 A curva de Koch . . . . .	15
3.1.1 Curva de Koch e contagem . . . . .	17
3.1.2 Perímetro na curva de Koch . . . . .	17
3.2 O floco de neve de Koch . . . . .	18
3.2.1 O floco de neve de Koch e contagem . . . . .	21
3.2.2 Perímetro no floco de neve de Koch . . . . .	22
3.2.3 Área no floco de neve de Koch . . . . .	23
3.3 O conjunto de Cantor . . . . .	26
3.3.1 O conjunto de Cantor e contagem. . . . .	26
3.3.2 Perímetro no conjunto de Cantor. . . . .	27
3.4 Curva de Peano . . . . .	28

---

3.4.1	Curva de Peano e contagem . . . . .	29
3.4.2	Perímetro na curva de Peano . . . . .	30
3.4.3	Área na curva de Peano . . . . .	31
3.5	A ilha de Minkowski . . . . .	31
3.5.1	A ilha de Minkowski e contagem . . . . .	32
3.5.2	Perímetro na ilha de Minkowski . . . . .	33
3.5.3	Área na ilha de Minkowski . . . . .	34
3.6	O triângulo de Sierpinski . . . . .	35
3.6.1	O triângulo de Sierpinski e contagem . . . . .	36
3.6.2	Relação entre o triângulo de Sierpinski e o triângulo de Pascal . . .	37
3.6.3	Perímetro no triângulo de Sierpinski . . . . .	37
3.6.4	Área no triângulo de Sierpinski . . . . .	39
3.7	A esponja de Menger . . . . .	40
3.7.1	A esponja de Menger e contagem . . . . .	41
3.7.2	Perímetro na esponja de Menger . . . . .	41
3.7.3	Área na esponja de Menger . . . . .	43
3.7.4	Volume na esponja de Menger . . . . .	45
3.8	O tetraedro de Sierpinski . . . . .	47
3.8.1	O tetraedro de Sierpinski e contagem . . . . .	47
3.8.2	Perímetro no tetraedro de Sierpinski . . . . .	48
3.8.3	Área no tetraedro de Sierpinski . . . . .	49
3.8.4	Volume no tetraedro de Sierpinski . . . . .	49
<b>4</b>	<b>Fractais versus alunos: construção e aprendizado</b>	<b>51</b>
4.1	Coleta de dados . . . . .	51
4.2	Apresentação dos dados . . . . .	52
4.3	Dificuldades do professor facilitador . . . . .	52
4.4	Dificuldades apresentadas pelos alunos na aplicação dos fractais em conso- nância aos assuntos programáticos da educação básica . . . . .	53
4.5	Relatos de aprendizados: A influência dos fractais no ensino. . . . .	54
<b>5</b>	<b>Fractais e suas aplicações em outras áreas do conhecimento</b>	<b>65</b>
5.1	Medicina e Biologia . . . . .	65

<b>Sumário</b>	<b>x</b>
5.2 Artes gráficas . . . . .	66
5.3 Geografia . . . . .	67
5.4 Economia . . . . .	67
5.5 Arte Fractal . . . . .	67
5.5.1 Classificação . . . . .	68
5.5.2 Paletas de curva . . . . .	68
5.5.3 Metafísica fractal . . . . .	69
5.5.4 Música fractal . . . . .	69
<b>6 Considerações finais</b>	<b>72</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>74</b>

# Introdução

Estamos acostumados a nos contentar com o que a Geometria Euclidiana nos apresenta a vê representado por pontos, retas, planos, cubos entre outros objetos que estão ao nosso redor. A percepção do novo e do extraordinário fica atrelado à concepção de definição desses elementos, não nos permitindo ver a beleza de vários fenômenos que estão em proximidade com nosso convívio, em nosso dia a dia.

Porém se olharmos com bastante atenção poderemos perceber que não é tão simples e regular as coisas como pensamos, a natureza presente em nosso cotidiano nos permite ter essa visão. Uma nuvem, uma couve-flor e uma ilha não apresentam formas circulares regulares, no entanto esses objetos naturais apresentam uma particular auto-similaridade de forma tal que uma parte do mesmo é similar ao todo.

Existem alguns comportamentos na natureza que são tão irregulares, tão sem forma que fogem completamente da Geometria Euclidiana. Essas formas na Geometria são chamadas amórficas e foram estudadas e analisadas por vários pesquisadores e em 1960, Benoît B. Mandelbrot apresentou uma posição concreta sobre o que seriam essas “não formas”. Refazendo alguns estudos e conhecendo as ideias de outros pesquisadores, apresentou estudos sobre fractais criando assim a teoria dos fractais.

Fractais caracterizam-se por terem uma aparência “confusa e bagunçada”, mas quando olhadas matematicamente sua análise denota figuras regulares e apresentam comportamentos curiosos como o de se assemelharem a elas mesmas quando observadas de diferentes escalas de tamanho.

O objetivo deste trabalho é caracterizar fractais, a matemática envolvida em seus cálculos e seus principais autores, tendo como objetivo principal suas aplicações na sala de aula em contexto com conteúdos do ensino básico e suas aplicações nesses campos.

# Capítulo 1

## Fractal

A palavra fractal vem da junção das palavras latinas *fractus* que significa “irregular” e *frangere* que significa “quebrar” e a pronuncia correta é “frac’tal”. Fractais são comumente conhecidos por serem geradores de figuras, aparentemente irregulares. Mas possuem muitas outras aplicações científicas, tais como compreensão de dados, simulação de filmes, análise de pulsos elétricos no cérebro e dos batimentos cardíacos, estudos demográficos entre outros.

A geometria fractal é relativamente nova. Entretanto teorias de conjuntos de dimensões fractais e equações não lineares diferenciais datam de mais de um século.

A geometria fractal é o ramo da matemática que estuda as propriedades e comportamento dos fractais. Descreve muitas situações que não podem ser explicadas facilmente pela geometria clássica, e foram aplicadas em ciência, tecnologia e arte gerada por computador. As raízes conceituais dos fractais remontam as tentativas de medir o tamanho de objetos para os quais as definições tradicionais baseadas na geometria euclidiana falham.

Um fractal (anteriormente conhecido como curva monstro) é um objeto geométrico que pode ser dividido em partes, cada uma das quais semelhantes ao objeto original. Diz-se que os fractais têm infinitos detalhes, são geralmente autossimilares e independentem de escala. Em muitos casos um fractal pode ser gerado por um padrão repetido, tipicamente um processo recorrente ou iterativo.

Os fractais foram realmente reconhecidos quando Mandelbrot conseguiu juntar tanto os estudos nessa área quanto seus estudos provando que existia regularidade por traz das figuras, aparentemente, amórficas. Um importante recurso utilizado por Mandelbrot



foi o computador. Através dele foi possível fazer as simulações necessárias, algo que os matemáticos anteriores a ele não possuíam. Vale lembrar que fractais são praticamente impossíveis de serem gerados sem recursos computacionais, devido á quantidade quase infinita de passos de iterações que estes necessitam.

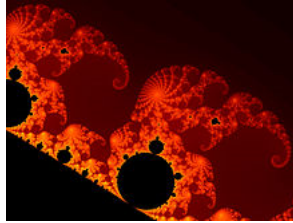


Figura 1.1: Conjunto de Mandelbrot

O conjunto de Mandelbrot é um exemplo de fractal.

## 1.1 História

Durante séculos, os objetos e os conceitos da filosofia e da geometria euclidiana foram considerados como os que melhor descreviam o mundo em que vivemos. A descoberta de geometrias não euclidianas introduziu novos objetos que representam certos fenômenos do Universo, tal como se passou com os fractais. Assim, considera-se hoje que tais objetos retratam formas e fenômenos da natureza.

A ideia dos fractais teve a sua origem no trabalho de alguns cientistas entre 1857 e 1913. Esse trabalho levou ao conhecimento de alguns objetos, catalogados como “demônios”, que se supunha não terem grande valor científico.

Em 1872, Karl Weierstrass encontrou o exemplo de uma função com a propriedade de ser contínua em todo seu domínio, mas em nenhuma parte diferenciável. O gráfico desta função é atualmente chamado de fractal. Em 1904, Helge Von Koch, não satisfeito com a definição muito abstrata e analítica de Weierstrass, deu sua definição mais geométrica de uma função similar, atualmente conhecida como Koch snowflake (ou floco de neve de Koch), que é o resultado de infinitas adições de triângulos ao perímetro de um triângulo inicial. Cada vez que novos triângulos são adicionados, o perímetro cresce, e fatalmente se aproxima do infinito. Dessa maneira, o fractal abrange uma área dentro de um perímetro infinito.

Também houve muitos outros trabalhos relacionados a estas figuras, mas esta

ciência só conseguiu se desenvolver plenamente a partir da década de 60, com o auxílio da computação. Um dos pioneiros a usar esta técnica foi Benoît Mandelbrot, um matemático que já tinha estudado tais figuras. Mandelbrot foi responsável por criar o termo fractal, e responsável pela descoberta de um dos fractais mais conhecidos, o conjunto de Mandelbrot.

## 1.2 Categorias de fractais

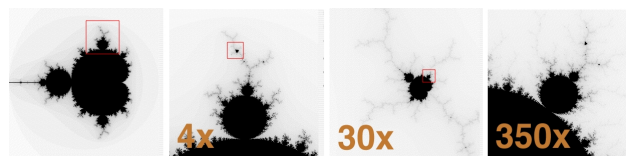


Figura 1.2: Conjunto de Mandelbrot ampliado

Os fractais podem ser agrupados em três categorias principais. Estas categorias são determinadas pelo modo como o fractal é formado ou gerado:

- Sistemas de funções iteradas - Estas possuem uma regra fixa de substituição geométrica. Conjunto de Cantor, tapete de Sierpinski, Sierpinski gaster, curva de Peano, floco de neve de Koch, curva do dragão de Harter-Heighway, T-Square, esponja de Menger, são alguns exemplos deste tipo de fractal.
- Fractais definidos por uma relação de recorrência em cada ponto do espaço (tal como o plano complexo). Exemplos deste tipo são o conjunto de Mandelbrot e o fractal de Lyapunov. Estes também são chamados de fractais de fuga do tempo.
- Fractais aleatórios, gerados por processos estocásticos ao invés de determinísticos, por exemplo, terrenos fractais e o voo de Lévy. Estes, também podem ser classificados de acordo com sua autossimilaridade.

Existem três tipos de autossimilaridade encontrados em fractais:

- Autossimilaridade exata: é a forma em que a autossimilaridade é mais marcante, evidente. O fractal é idêntico em diferentes escalas. Fractais gerados por sistemas de funções iterativas geralmente apresentam uma autossimilaridade exata.

- Quase autossimilaridade: é a forma mais solta de autossimilaridade. O fractal aparenta ser aproximadamente (mas não exatamente) idêntico em escalas diferentes. Fractais quase autossimilares contêm pequenas cópias do fractal inteiro de maneira distorcida ou degenerada. Fractais definidos por relações de recorrência são geralmente quase autossimilares.
- Autossimilaridade estatística: é a forma menos evidente de autossimilaridade. O fractal possui medidas numéricas ou estatísticas que são preservadas em diferentes escalas. As definições de fractais geralmente implicam em alguma forma de autossimilaridade estatística (mesmo a dimensão fractal é uma medida numérica preservada em diferentes escalas). Fractais aleatórios são exemplos de fractais que possuem autossimilaridade estatística, mas não são exatamente nem quase autossimilares.

Entretanto, nem todos os objetos autossimilares são considerados fractais. Uma linha real (uma linha reta euclidiana), por exemplo, é exatamente autossimilar, mas o argumento de que objetos euclidianos são fractais é defendido por poucos. Mandelbrot argumentava que a definição de fractal deveria incluir não apenas fractais “verdadeiros”, mas também objetos euclidianos tradicionais, pois números irracionais em uma linha reta representam propriedades complexas e não repetitivos.

Pelo fato do fractal possuir uma granulométrica infinita, nenhum objeto natural pode sê-lo. Os objetos naturais podem exibir uma estrutura semelhante ao fractal, porém com uma estrutura de tamanho limitado.

### 1.3 Definições

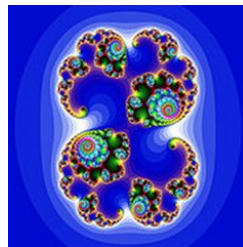


Figura 1.3: Fractal de Julia Set

Os fractais podem ser definidos segundo algumas características intuitivas, pois se torna difícil à conversão da definição matemática para a linguagem ordinária devida

a falta de termos adequados à sua tradução. Mandelbrot definiu fractal como “um sistema organizado” para o qual a dimensão de Hausdorff-Besicovitch excede estritamente a dimensão topológica (número inteiro que caracteriza a geometria de um objeto euclidiano, por exemplo: zero para um ponto, um para uma linha, etc.), onde fractais cujas estruturas sejam ego-semelhantes, ou a dimensão de Hausdorff é igual à dimensão de Minkowski-Bouligand. Uma definição mais simples é esta: “Fractais são objetos gerados pela repetição de um mesmo processo recursivo, apresentando autossimilaridade e complexidade infinita”.

Na definição de fractal, os problemas de linguagem incluem:

- Não há nenhum significado para o termo “muito irregular”.
- Quando se diz “dimensão”, pode haver dúvida na definição do conceito, pois o termo pode ter diversos significados (por exemplo, “tamanho”, “importância, no sentido de valor”, “ordem de matrizes na representação matricial do grupo”, “grau”, “num espaço vetorial, o número de valores de sua base”, “num espaço, o número mínimo de coordenadas necessárias à determinação unívoca de seus pontos”, etc.). Porém no caso dos fractais, dimensão significa estritamente o “número fracionário ou irracional que caracteriza a geometria de um fractal.”
- Há muitos modos que um objeto pode ser ego-semelhante. Pode-se tentar explicar como uma espécie de fractais “irmãos gêmeos idênticos”, onde existe a igualdade na semelhança física, porém suas “personalidades” são diferentes. Isto ocorre quando inicialmente as curvas são alimentadas pelos mesmos dados, mas em determinado momento, há um desvio nos valores dos dados, por exemplo, quando observamos dois fractais numa escala 1:1, estes têm exatamente a mesma aparência, mas se observamos numa escala 1:1.000.000, as figuras observadas são completamente diferentes.
- Nem todo fractal possui repetitividade, dependendo dos dados inseridos (principalmente no domínio do tempo) este não terá em escalas menores a mesma aparência, aparecendo distorções da figura.

## 1.4 Exemplos

Duas folhas de acrílico cobertas de cola, quando espremidas formam um fractal natural.



Figura 1.4: Folhas de Acrílico

Uma perturbação causada por alta tensão em um bloco de acrílico cria um fractal. (Figura Lichtenberg)



Figura 1.5: Bloco de acrílico

Árvores e samambaias (ou fetos) são fractais naturais que podem ser modelados em computadores que usam algoritmos recursivos. Esta propriedade de repetitividade está clara nestes exemplos, pois num ramo de uma árvore ou na folhagem de uma samambaia pode ser observada uma réplica em miniatura do todo. Não idêntico, porém semelhante na estrutura.

Uma classe relativamente simples de exemplos é o Conjunto de Cantor que observado num intervalo (digamos 1:1) e então em outro (1:10) mais curto (ou aberto), visto numa escala de 0,1 é uma figura que pode (ou não pode) ser “ego-semelhante” em determinado amplificação, e pode (ou não pode) ter uma dimensão  $d$ , com  $0 < d < 1$ .

Os fractais são geralmente corrugados na sua forma (tanto em cálculos quanto nas imagens resultantes destes). Portanto, não são objetos definíveis pela geometria tradicional. Isso quer dizer que os fractais tendem a ter detalhes significativos, visíveis sob qualquer ponto de vista (ou seja, suas variações visuais são perfeitamente mensuráveis), quando houver uma ego-semelhança, isto pode ocorrer porque ao se observar sob “zoom” figuras semelhantes observamos a recursividade, ou repetitividade destes.

Um brócolis romanesco como exemplo de um belo fractal natural.



Figura 1.6: Brócolis Romanesco

Por exemplo, numa forma euclidiana normal (como um círculo) esta parece mais ampliada e alisada quando é amplificada. Numa ampliação infinita seria impossível se diferenciar entre o círculo e uma linha reta. No caso dos fractais, isto não acontece (embora, quanto mais amplificarmos, mais nos aproximaremos da linha reta também, isto ocorre devida perda de dados em múltiplas ampliações, ou seja, os desvios acontecem devida imprecisão das inserções sequenciais dos dados).

A ideia convencional de curvatura representada pela reciprocidade radial (em radianos) num círculo por aproximação, não pode ser usualmente aplicada em escalas muito grandes (neste caso, o “raio” de curvatura ficará fora de escala, daí a “aparência” de uma linha reta).

Ao contrário com fractais, ao se aumentar a amplificação, se revelarão mais e mais detalhes. Estes dependerão do grau de precisão e da quantidade de casas decimais dos dados inseridos. As distorções tendendo para a linha reta, ocorrem justamente pelo fato de haver “falta de memória” nas máquinas que executam o cálculo. Portanto, um fractal jamais alcançará uma linha reta, salvo quando a fórmula que o constitui assim o permita.

Alguns exemplos comuns de fractais:

- Conjunto de Mandelbrot.
- Fractal de Lyapunov.
- Tapete de Sierpinski.
- Sierpinski gaster.
- Menger sponge.
- Curva de dragão.
- Curva de Peano.

- Curva de Koch.
- Curva de Cantor.
- O Conjunto de Cantor.

Os fractais podem ser determinísticos ou estocásticos.

No caso da Teoria do Caos, podemos associá-la aos fractais, também conhecido “Mandelbrot set”. No Conjunto de Mandelbrot podemos observar discos inteiros, cuja dimensão é 2. Isto não é de surpreender, porém o que é verdadeiramente surpreendente é que o limite do Conjunto de Mandelbrot também tem uma dimensão de Hausdorff de 2.

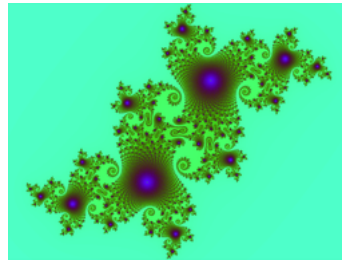


Figura 1.7: Conjunto de Julia

Um conjunto de Julia é um fractal relacionado ao conjunto de Mandelbrot.

Aproximações de fractais (fractais naturais) são encontradas frequentemente na natureza. Estes objetos exibem uma estrutura complexa próxima aos objetos matemáticos, porém finitas se as observamos em maiores escalas.

Os fractais naturais estão à nossa volta, basta observarmos as nuvens, as montanhas, os rios e seus afluentes, os sistemas de vasos sanguíneos, os feixes nervosos, etc. Com maiores ou menores graus, estas figuras estão classificadas em diversas magnitudes. Apesar de existirem por toda a natureza, e serem onipresentes, estes objetos somente foram realmente estudados a fundo no século XX.

Harrison estendeu o cálculo Newtoniano para o domínio fractal, também inseriu os Teoremas Gauss da divergência, o Teorema de Green, e o Teorema de Stoke.

Os fractais são normalmente gerados através de computadores com softwares específicos. Através de seu estudo podemos descrever muitos objetos extremamente irregulares do mundo real. Como exemplo de software temos o Xaos.

Os meteorologistas utilizam o cálculo fractal para verificar as turbulências da atmosfera incluindo dados como nuvens, montanhas, a própria turbulência, os litorais e

árvores. As técnicas fractais também estão sendo empregadas para a compactação de imagens através da compressão fractal, além das mais diversas disciplinas científicas que utilizam o processo.

## Montanha Fractal

A superfície de uma montanha pode ser modelada num computador usando um fractal: começamos com um triângulo no espaço 3D. Acham-se os pontos centrais das 3 linhas que formam o triângulo e criam-se 4 novos triângulos a partir desse triângulo.

Deslocam-se depois aleatoriamente esses pontos centrais para cima ou para baixo dentro de uma gama de valores estabelecido. Vai-se repetindo o mesmo procedimento, mas fazendo os deslocamentos dos pontos centrais dentro de uma gama de valores que em cada iteração é igual à metade da anterior.

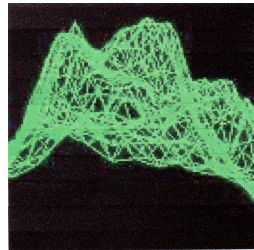


Figura 1.8: Montanha Fractal



# Capítulo 2

## A dimensão de um fractal

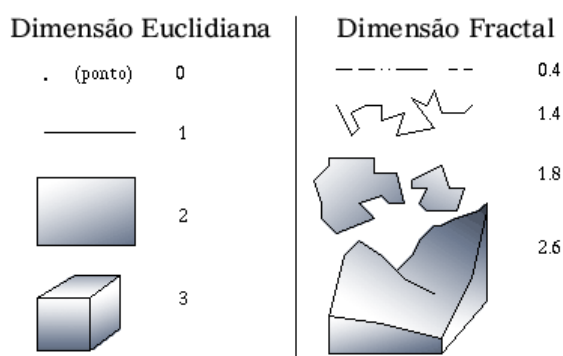


Figura 2.1: Dimensão Fractal

Sabemos que os elementos da Geometria Euclidiana usual possuem dimensões zero, um, dois e três, respectivamente, para um ponto, uma reta, um quadrado e um cubo. Ao dividimos uma reta, um quadrado ou um cubo em partes iguais essas figuras apresentarão uma autossimilaridade para cada uma dessas subdivisões em relação à figura original. Dessa forma se dividirmos um segmento de comprimento ( $C$ ) em cinco partes iguais o fator de redução de cada uma dessas partes menores pode ser dado por  $r = 1/5$  tal que o comprimento de cada parte é  $C/5$  e  $N = 5$  é o número total de peças (ou reduções) nesse procedimento. Podemos então inferir que  $N = (1/r)^D$ , onde  $D$  é a dimensão do elemento tomado como ponto de partida nessa aplicação, em nosso caso tomamos um segmento cuja dimensão  $D = 1$ .

Podemos aplicar um procedimento análogo para um quadrado e para um cubo. Dividindo o quadrado e o cubo respectivamente em nove e oito partes iguais teremos os fatores de redução  $r = 1/3$  no quadrado e  $r = 1/2$  para o cubo. Daí temos que  $N = (1/r)^D$

tanto para o quadrado, quanto para o cubo alterando apenas o fator de redução “ $r$ ”, quando nos referirmos a um ou ao outro.

Notemos então que a dimensão de um fractal pode ser vista como o valor  $D$  tal que  $N = (1/r)^D$ , em que  $r$  é o fator de redução da iteração que o gera e  $N$  é o número total de reduções que constituem essa iteração. Daí aplicando logaritmo na igualdade  $N = (1/r)^D$ , obtemos:

$$\begin{aligned}\log N &= \log(1/r)^D \\ \Rightarrow \log N &= D \cdot \log(1/r) \\ \Rightarrow D &= \log N / (\log(1/r)).\end{aligned}$$

Por exemplo, no caso da curva de Peano (figura 3.5), utilizamos nove segmentos ( $N = 9$ ) que são a redução de fator  $1/3$  ( $r = 1/3$ ) do segmento anterior.

Então:

$$\begin{aligned}D &= \log N / (\log(1/r)) \\ &= \log 9 / (\log(1/(1/3))) \\ &= \log 9 / \log(3) \\ &= (\log 3^2) / \log(3) \\ &= 2 \cdot \log 3 / \log(3) \\ &= 2.\end{aligned}$$

Apenas podemos aplicar esta construção da noção de dimensão de fractal a fractais constituídos por reduções de igual fator de redução.

## 2.1 Outra forma de determinarmos a dimensão de um fractal

### Dimensão de Hausdorff

O triângulo de Sierpinski tem dimensão de Hausdorff:

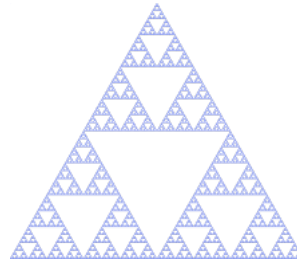


Figura 2.2: Triângulo de Sierpinski

$$\begin{aligned}d &= (\log(L/N))/\log(R) \\ &= (\log((1/2)/3))/\log(1/2) \\ &= (\log(1/3))/\log(1/2) \\ &= (\log(3))/\log(2) \\ &= 1,58.\end{aligned}$$

Existem muitas abordagens sobre dimensões fractais de imagens e/ou objetos. Entre estas, a Dimensão de Hausdorff considera-se a mais utilizada. Ela foi apresentada em 1918 pelo matemático Felix Hausdorff.

Os fractais devido as suas formas geométricas não são classificados segundo a geometria euclidiana. As estimativas encontradas pela dimensão fractal podem assim determinar as complexidades dos objetos fractais. Estas podem ser aplicadas nas mais diversas situações. Portanto, através das comparações experimentais, entre fractais e formas geométricas, é possível realizar estudos no sentido de encontrar técnicas diversas baseadas em resultados experimentais.

Para determinar a dimensão de Hausdorff, divide-se uma linha em  $N$  partes iguais onde  $N = N^1$ , assim, é sabido que o tamanho dos fragmentos de reta são  $1/N$ . Ao se dividir os lados de um quadrado em  $N$  partes iguais, dividimos o quadrado em  $N^2$  partes iguais. Analogamente, ao se dividir as arestas de um cubo em  $N$  partes iguais, dividimos o cubo em  $N^3$  partes iguais.

Generalizando, se tivermos um hipercubo de  $d$  dimensões, este poderá ser dividido em  $N^d$  partes iguais.

Assim fica demonstrado que na geometria convencional a dimensão é igual ao valor do expoente de  $N$ .

Logo, podemos afirmar que  $R = (L/N)^{-d}$ , onde o segmento  $L$  pode ser afirmado comprimento da linha, e  $N$  é definido como o número das partes em que a linha pode ser dividida numa interação  $n$  da construção do fractal, assim,  $R$  será o comprimento do segmento na interação  $n$ , onde  $n$  é um número natural.

Logo, a dimensão do fractal chamada “ $d$ ” será ao aplicarmos o logaritmo a ambos os membros na igualdade  $R = (L/N)^{-d}$ , obtendo:

$$\begin{aligned}\log R &= \log(L/N)^{-d} \\ \Rightarrow \log R &= (-d)\log(L/N) \\ \Rightarrow -d &= \frac{(\log R)}{\log(L/N)} \\ \Rightarrow d &= \frac{(\log(L/N))}{\log(R)}\end{aligned}$$

Portanto, “ $d$ ” é a dimensão de Hausdorff.

# Capítulo 3

## Fractais, contagem, perímetros, áreas, volumes e sequências.

### 3.1 A curva de Koch

A curva de Koch é uma curva geométrica e um dos primeiros fractais a serem descritos.

Aparece pela primeira vez num artigo de 1906, intitulado “Une méthode géométrique pour l'étude de certaines questions de la théorie des courbes planes”, de autoria do matemático sueco Helge Von Koch. O mais conhecido Floco de neve de Koch (ou estrela de Koch) corresponde à mesma curva, tirando que se inicia a sua construção a partir de um triângulo equilátero (em vez de segmento de reta). Eric Haines desenvolveu o mesmo conceito, a três dimensões, o que resultou num fractal com volume de um floco de neve.

Podemos imaginar a sua construção a partir de um segmento de reta que será submetido a alterações recorrentes (iterações), como a seguir se descreve:

1. Divide-se o segmento de reta em três segmentos de igual comprimento.
2. Desenha-se um triângulo equilátero (fazendo um ângulo de 60 graus), em que o segmento central, referido no primeiro passo, servirá de base.
3. Apaga-se o segmento que serviu de base ao triângulo do segundo passo.

Depois disto feito, o resultado será semelhante à secção longitudinal de um chapéu de bruxa.

Procedendo da mesma forma para cada um dos quatro segmentos que ficam, formam-se dezesseis novos segmentos menores. A curva de Koch é o limite para o qual tende esta construção, repetindo as operações referidas, sucessivamente, para cada segmento.

A figura seguinte representa as seis primeiras etapas da construção. A última curva é uma boa aproximação da curva final. Dimensão D, onde  $D = 1,262\dots$

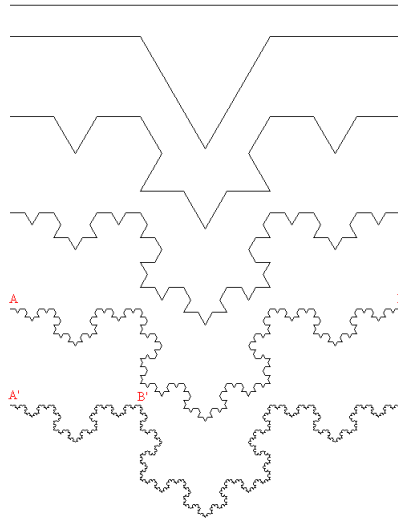


Figura 3.1: A curva de Koch

Se considerarmos cada passo, notamos que para passar de uma linha para a seguinte, substituímos três segmentos por quatro de igual comprimento, ou seja, o comprimento total é multiplicado por  $4/3$ . O limite da sucessão geométrica de razão  $4/3$  é o infinito, o que significa que a figura final (ou para que tende esta sucessão) terá um comprimento infinito (designado por Mandelbrot como “infinito interno”).

Esta característica típica dos fractais, acrescentada ao fato de a curva parecer ter certa espessura devido às constantes mudanças de direção, sugere que esta figura não é unidimensional (não é apenas uma linha, dotada apenas de comprimento). A sua dimensão estará entre 1 (da reta) e 2 (do plano).

Então:

$$\begin{aligned}
 D &= \log N / (\log(1/r)) \\
 &= \log 4 / (\log(1/(1/3))) \\
 &= (\log 2^2) / \log 3 \\
 &= 2 \cdot \log 2 / \log 3 \\
 &= 1,262\dots
 \end{aligned}$$

### 3.1.1 Curva de Koch e contagem

Em contexto direcionado ao ensino médio tomaremos o comprimento inicial do segmento igual a “C” podemos perceber que:

- Na iteração zero, temos 1 segmento (ou  $4^0$  segmentos);
- Na iteração um, temos 4 segmentos (ou  $4^1$  segmentos);
- Na iteração dois, temos 16 segmentos (ou  $4^2$  segmentos);
- Na iteração três, temos 64 segmentos (ou  $4^3$  segmentos);
- Na iteração quatro, temos 256 segmentos (ou  $4^4$  segmentos) e assim por diante, o que nos faz inferir que na iteração “n” teremos  $4^n$  segmentos.

Como  $4 > 1$ , percebemos que a partir do momento que “n” tende ao infinito, o número de segmentos tende ao infinito.

Dessa forma a quantidade de segmentos provenientes em cada iteração na Curva de Koch, constituirá uma sequência do tipo P.G. (progressão geométrica) de razão 4, assim temos que a quantidade de segmentos no conjunto de todas as iterações será dada pela soma dos termos dessa sequência.

### 3.1.2 Perímetro na curva de Koch

Tendo conhecimento que em cada iteração a partir da primeira, os segmentos anteriores são substituídos por quatro segmentos menores de mesmo comprimento, podemos então inferir que:

- Na iteração zero, temos 1 segmento de comprimento C cujo perímetro é:

$$P_0 = C$$

- Na iteração um, temos 4 segmentos de comprimento  $\frac{C}{3}$  cujo perímetro é:

$$P_1 = \frac{4}{3} \cdot C$$

- Na iteração dois, temos 16 segmentos de comprimento  $\frac{C}{9}$  cujo perímetro é:

$$\begin{aligned} P_2 &= \frac{16}{9} \cdot C \\ &= \left(\frac{4}{3}\right)^2 \cdot C \end{aligned}$$

- Na iteração três, temos 64 segmentos de comprimento  $\frac{C}{27}$  cujo perímetro é:

$$\begin{aligned} P_3 &= \frac{64}{27} \cdot C \\ &= \left(\frac{4}{3}\right)^3 \cdot C \end{aligned}$$

- Na iteração quatro, temos 256 segmentos de comprimento  $\frac{C}{81}$  cujo perímetro é:

$$\begin{aligned} P_4 &= \frac{256}{81} \cdot C \\ &= \left(\frac{4}{3}\right)^4 \cdot C \end{aligned}$$

- Desta forma para “n” iterações temos que o perímetro é dado por:

$$P_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n \cdot C$$

Como  $4/3 > 1$  temos que o perímetro tende ao infinito, quando o número “n” de iterações tende ao infinito.

A curva de Koch deu origem a um outro fractal, conhecido como floco de neve ou ilha de Von Koch.

Este último modelo é constituído partindo de um triângulo equilátero.

## 3.2 O floco de neve de Koch

Construção da ilha de Von Koch

Constrói-se a ilha de Von Koch em cada aresta das três do triângulo.

Dimensão D, onde:

$$\begin{aligned} D &= \log N / (\log(1/r)) \\ &= \log 4 / (\log(1/(1/3))) \\ &= (\log 2^2) / (\log(3)) \\ &= (2 \cdot \log 2) / (\log(3)) \\ &= 1,262... \end{aligned}$$

Observe que a determinação da dimensão D da ilha de Von Koch é análoga a determinação da dimensão da curva de Koch, conforme apresentado acima.



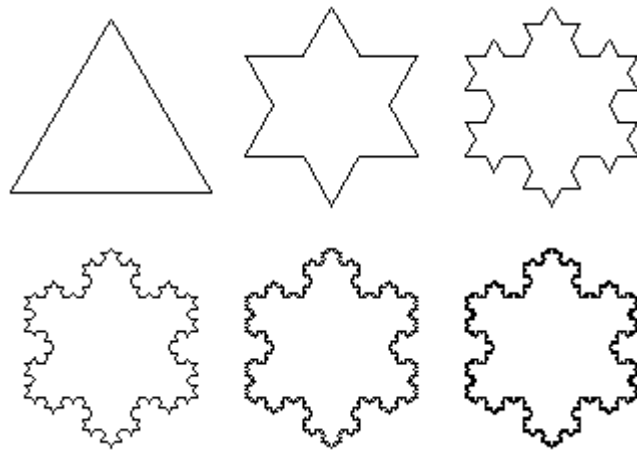


Figura 3.2: A ilha de Von Koch

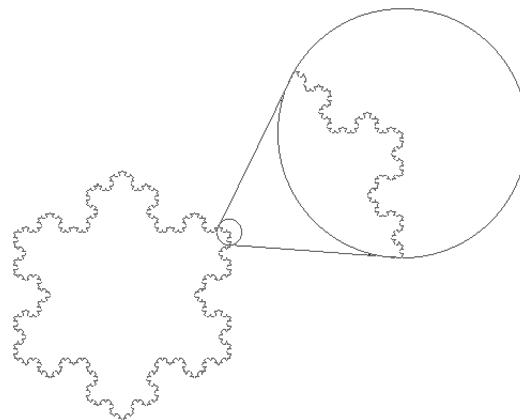


Figura 3.3: A ilha de Von Koch ampliada

Quanto à autossimilaridade, o modo de construção da curva de Von Koch sugere que ela seja autossimilar.

Em cada passo, uma quarta parte da curva é semelhante à curva obtida no passo anterior, logo, não existe autossimilaridade nas curvas que se vão obtendo em cada passo. Contudo, pode-se prever a autossimilaridade na curva limite, embora uma demonstração fosse necessária para demonstrá-la.

Sejam  $n$  e  $C$ , respectivamente, o número de iterações e o comprimento e  $\delta$  o comprimento de cada parte após  $n$  iterações e  $L(\delta)$  o comprimento total.

Sejam  $\delta$  e  $L(\delta)$  definidos por  $\delta = 3^{-n}$  e  $L(\delta) = (4/3)^n$ .

Assim:

$$\begin{aligned}\delta &= 3^{-n} \\ \Rightarrow \log_e \delta &= \log_e 3^{-n} \\ \Rightarrow \ln \delta &= -n \cdot \ln 3 \\ \Rightarrow n &= (-\ln \delta) / \ln 3.\end{aligned}$$

Então:

$$\begin{aligned}L(\delta) &= (4/3)^n \\ \Rightarrow L(\delta) &= (4/3)^{-\ln \delta / \ln 3} \\ \Rightarrow \ln L(\delta) &= \ln (4/3)^{-\ln \delta / \ln 3} \\ &= \frac{-\ln \delta}{\ln 3} \cdot \ln(4/3) \\ &= \frac{-\ln \delta}{\ln 3} \cdot (\ln 4 - \ln 3) \\ \Rightarrow e^{\ln L(\delta)} &= e^{\frac{-\ln \delta}{\ln 3} \cdot (\ln 4 - \ln 3)} \\ \Rightarrow L(\delta) &= e^{\frac{-\ln \delta}{\ln 3} \cdot (\ln 4 - \ln 3)} \\ &= e^{\frac{-\ln \delta \cdot \ln 4 + \ln \delta \cdot \ln 3}{\ln 3}} \\ &= e^{\frac{-\ln \delta \cdot \ln 4}{\ln 3}} \cdot e^{\ln \delta} \\ &= e^{\ln \delta} \cdot \frac{e^{-\ln 4}}{\ln 3} \\ &= \delta \cdot (\delta)^{-\ln 4 / \ln 3}; D = \ln 4 / \ln 3 \\ \Rightarrow L(\delta) &= \delta \cdot (\delta)^{-D} \\ \Rightarrow L(\delta) &= (\delta)^{1-D}\end{aligned}$$

Tomemos agora  $N(\delta)$  como o número de partes após cada iteração, sendo definido por  $N(\delta) = 4^n$ .

Então:

$$\begin{aligned}
 N(\delta) &= 4^n \\
 \Rightarrow N(\delta) &= 4^{(-\ln\delta)/\ln 3} \\
 \Rightarrow \ln N(\delta) &= \ln 4^{(-\ln\delta)/\ln 3} \\
 \Rightarrow \ln N(\delta) &= \frac{\ln 4}{\ln 3} \cdot (-\ln\delta) \\
 \Rightarrow e^{\ln N(\delta)} &= e^{\frac{\ln 4}{\ln 3} \cdot (-\ln\delta)} \\
 \Rightarrow N(\delta) &= (e^{\ln 4})^{(-\ln\delta)/\ln 3} \\
 &= (4)^{(-\ln\delta)/\ln 3} \\
 &= (\delta)^{-D}
 \end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned}
 L(\delta) &= \delta \cdot (\delta)^{-D} \\
 \Rightarrow L(\delta) &= \delta \cdot N(\delta)
 \end{aligned}$$

Para construirmos o floco de neve de Koch seguiremos as etapas abaixo:

1. Tomemos um triângulo equilátero na iteração zero.
2. Para a iteração um dividimos cada lado do triângulo em três partes iguais e procederemos de modo análogo à etapa dois e três da construção da Curva de Koch, para cada lado desse triângulo, procedendo dessa forma para as “n” etapas de construção desse fractal.

### 3.2.1 O floco de neve de Koch e contagem

Pelo que foi visto da construção do floco de neve de Koch e tomando o comprimento do lado do triângulo equilátero igual a “C”, obteremos:

- Na iteração zero, 3 segmentos (ou  $3 \cdot 4^0$  segmentos);
- Na iteração um, 12 segmentos (ou  $3 \cdot 4^1$  segmentos);
- Na iteração dois, 48 segmentos (ou  $3 \cdot 4^2$  segmentos);
- Na iteração três, 192 segmentos (ou  $3 \cdot 4^3$  segmentos);

- Na iteração quatro, 768 segmentos (ou  $3 \cdot 4^4$  segmentos), desta forma para “n” iterações temos  $3 \cdot 4^n$  segmentos.

Como  $4 > 1$ , percebemos que a partir do momento que “n” tende ao infinito, o número de segmentos tende ao infinito.

Analogamente à curva de Koch a quantidade de segmentos provenientes em cada iteração no floco de neve de Koch, constituirá uma sequência do tipo P.G. (progressão geométrica) de razão 4, assim temos que a quantidade de segmentos no conjunto de todas as iterações será dada pela soma dos termos dessa sequência.

### 3.2.2 Perímetro no floco de neve de Koch

Analisando as etapas de construção apresentadas anteriormente segue-se que:

- Na iteração zero, temos 3 segmentos de comprimento C cujo perímetro é:

$$P = 3C$$

- Na iteração um, temos 3.4 (ou  $3 \cdot 4^1$ ) segmentos de comprimento  $\frac{C}{3}$  cujo perímetro é:

$$\begin{aligned} P &= 3 \cdot 4 \cdot \frac{C}{3} \\ &= 3C \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^1 \end{aligned}$$

- Na iteração dois, temos 3.16 (ou  $3 \cdot 4^2$ ) segmentos de comprimento  $\frac{C}{9}$  cujo perímetro é:

$$\begin{aligned} P &= 3 \cdot 16 \cdot \frac{C}{9} \\ &= 3 \cdot 4^2 \cdot \frac{C}{3^2} \\ &= 3C \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2 \end{aligned}$$

- Na iteração três, temos 3.64 (ou  $3 \cdot 4^3$ ) segmentos de comprimento  $\frac{C}{27}$  cujo perímetro é:

$$\begin{aligned} P &= 3 \cdot 64 \cdot \frac{C}{27} \\ &= 3 \cdot 4^3 \cdot \frac{C}{3^3} \\ &= 3C \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^3 \end{aligned}$$

- Na iteração quatro, temos  $3.256$  (ou  $3.4^4$ ) segmentos de comprimento  $\frac{C}{81}$  cujo perímetro é:

$$\begin{aligned} P &= 3.256 \cdot \frac{C}{81} \\ &= 3.4^4 \cdot \frac{C}{3^4} \\ &= 3C \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^3 \end{aligned}$$

- Desta forma para “n” iterações temos  $3.4^n$  segmentos cujo perímetro é dado por:

$$\begin{aligned} P &= 3.4^n \cdot \frac{C}{3^n} \\ &= 3C \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n \end{aligned}$$

Como  $4/3 > 1$  temos que o perímetro tende ao infinito, quando o número “n” de iterações tende ao infinito. Observamos tanto na curva de Koch quanto no floco de neve de Koch que após cada iteração o perímetro é dado por uma P.G. de razão  $4/3$ .

### 3.2.3 Área no floco de neve de Koch

Inicialmente para a iteração zero tomaremos a área do triângulo equilátero igual a “A”. Seguindo nosso processo de construção desse fractal, poderemos perceber que em cada lado desse triângulo haverá um aumento em sua área equivalente a  $1/9$  da original para próxima iteração.

Assim na iteração um, para um dos lados teremos uma área  $A_1 = \frac{1}{9}A$

Dando sequência a esse procedimento, teremos:

- Na iteração dois uma área  $A_2 = A_1 + 4 \cdot \frac{1}{9}A_1 = \left(1 + \frac{4}{9}\right)A_1$
- Na iteração três uma área  $A_3 = A_1 + \frac{4}{9}A_1 + \frac{16}{81}A_1 = \left(1 + \frac{4}{9} + \left(\frac{4}{9}\right)^2\right) \cdot A_1$

Dessa forma para “n” iterações teremos uma área respectivamente dada por:

$$A_n = \left(1 + \frac{4}{9} + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \dots + \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right)A_1$$

Observamos que a sequência  $(1, 4/9, (4/9)^2, \dots, (4/9)^{n-1})$  é uma P.G. de razão  $4/9$ , daí:

$$\begin{aligned} A_n &= \left( \frac{1}{1 - \frac{4}{9}} \right) A_1 \\ &= \frac{1}{(5/9)} A_1 \\ &= \frac{9}{5} A_1 \end{aligned}$$

Como esse procedimento deve ser feito para os três lados do triângulo, para obtermos a área do floco de neve de Koch, basta multiplicarmos  $A_n$  pelo fator três e adicionarmos a área inicial “A”.

Assim, temos que a área total desse fractal é dada por:

$$\begin{aligned} A_T &= 3A_n + A \\ &= 3 \cdot \left( \frac{9}{5} \right) A_1 + A \\ &= 3 \cdot \frac{9}{5} \cdot \frac{1}{9} A + A \\ &= \frac{3}{5} A + A \\ &= \frac{8}{5} A \end{aligned}$$

Por outro lado poderíamos ter feito esse procedimento considerando ambos os lados desse triângulo obtendo para a iteração um uma área

$$\begin{aligned} A_1 &= A + 3 \cdot \frac{1}{9} \cdot A \\ &= A + \frac{1}{3} A \end{aligned}$$

Dando sequência a esse procedimento, teremos:

- Na iteração dois uma área

$$\begin{aligned} A_2 &= A + 3 \cdot \frac{1}{9} \cdot A + 12 \cdot \frac{1}{81} \cdot A \\ &= A + \frac{1}{3} A + \frac{4}{27} A \\ &= A + \left( \frac{1}{3} + \frac{4}{27} \right) A \\ &= A + \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9} \right) A \end{aligned}$$

- Na iteração três uma área

$$\begin{aligned}
 A_2 &= A + \frac{1}{3}A + \frac{4}{27}A + 48 \cdot \frac{1}{729}A \\
 &= A + \frac{1}{3}A + \frac{4}{27}A + \frac{16}{243}A \\
 &= A + \left(\frac{1}{3} + \frac{4}{27} + \frac{16}{243}\right)A \\
 &= A + \left(\left(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9} + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^2\right)\right) \cdot A
 \end{aligned}$$

Dessa forma para “n” iterações teremos uma área respectivamente dada por:

$$\begin{aligned}
 A_n &= A + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9} + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^3 + \dots + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right) \cdot A \\
 &= A + \left(\frac{1}{3} \cdot \left(1 + \frac{4}{9} + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \left(\frac{4}{9}\right)^3 + \dots + \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right)\right) \cdot A
 \end{aligned}$$

Como a sequência  $(1, 4/9, (4/9)^2, \dots, (4/9)^{n-1})$  é uma P.G. de razão  $4/9$ , temos que:

$$\begin{aligned}
 A_n &= A + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{4}{9}}\right) A \\
 &= A + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{\frac{5}{9}}\right) A \\
 &= A + \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{5} A \\
 &= A + \frac{3}{5} A \\
 &= \frac{8}{5} A
 \end{aligned}$$

### 3.3 O conjunto de Cantor

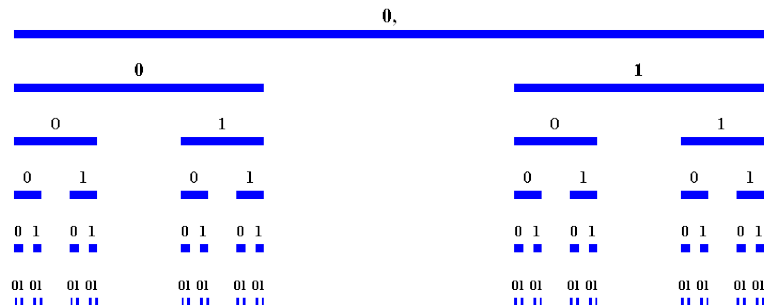


Figura 3.4: O conjunto de Cantor

Dimensão D, onde

$$\begin{aligned}
 D &= \log N / (\log(1/r)) \\
 &= \log 2 / (\log(1/(1/3))) \\
 &= (\log 2) / (\log 3) \\
 &= 0,6309...
 \end{aligned}$$

Temos aqui um exemplo de um fractal com dimensão entre zero e um.

De forma bem singular para construirmos o conjunto de cantor em contexto com o ensino aprendizagem na educação básica direcionada ao ensino médio, inicialmente consideraremos um segmento de comprimento “C”, a partir deste o dividiremos em três partes iguais de comprimento C/3 cada uma. Considerando este procedimento inicial vamos suprimir a parte central obtendo assim as duas partes laterais, daí procederemos da mesma forma para os dois segmentos restantes. Repetindo infinitamente esse processo de iteração para os demais segmentos subsequentes obtemos o conjunto de Cantor.

#### 3.3.1 O conjunto de Cantor e contagem.

Ao observarmos esse processo iterativo podemos notar que:

- Na iteração zero, temos um segmento (ou  $2^0$  segmentos);
- Na iteração um, temos dois segmentos (ou  $2^1$  segmentos);
- Na iteração dois, temos quatro segmentos (ou  $2^2$  segmentos);
- Na iteração três, temos oito segmentos (ou  $2^3$  segmentos);



- Na iteração quatro, temos dezesseis segmentos (ou  $2^4$  segmentos) e assim sucessivamente.

Dessa forma para a iteração “n” teremos  $2^n$  segmentos.

A partir desse momento os discentes poderão perceber que a quantidade de segmentos restantes no conjunto de Cantor após cada iteração, constituirá uma sequência do tipo P.G (progressão geométrica) de razão 2, de onde a quantidade de segmentos no conjunto de todas as iterações será dada pela soma dos termos dessa sequência.

Como  $2 > 1$ , podemos inferir que a partir do momento que “n” tende ao infinito, o número de segmentos tende ao infinito.

### 3.3.2 Perímetro no conjunto de Cantor.

Nessa etapa é de nosso conhecimento que tomando um segmento de comprimento “C”, temos para a iteração zero um perímetro (P) de tamanho “C”. Como cada segmento a partir da iteração um, é dividido em três partes iguais e suprimida a central segue-se que:

- Na iteração zero, temos 1 segmento de comprimento C cujo perímetro é:

$$P_0 = C$$

- Na iteração um, temos 2 segmentos de comprimento  $\frac{C}{3}$  cujo perímetro é:

$$P_1 = \frac{2}{3}C$$

- Na iteração dois, temos 4 segmentos de comprimento  $\frac{C}{9}$  cujo perímetro é:

$$\begin{aligned} P_2 &= \frac{4}{9}C \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^2 C \end{aligned}$$

- Na iteração três, temos 8 segmentos de comprimento  $\frac{C}{27}$  cujo perímetro é:

$$\begin{aligned} P_3 &= \frac{8}{27}C \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^3 C \end{aligned}$$

- Na iteração quatro, temos 16 segmentos de comprimento  $\frac{C}{81}$  cujo perímetro é:

$$\begin{aligned} P_4 &= \frac{16}{81}C \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^4 C \end{aligned}$$

Desta forma para “n” iterações temos que o perímetro é dado por:

$$P = \left(\frac{2}{3}\right)^n C$$

Como  $(2/3) < 1$  temos que o perímetro tende a zero, quando o número “n” de iterações tende ao infinito.

Podemos observar ainda que a cada iteração o perímetro é definido por uma P.G. de razão  $2/3$ .

### 3.4 Curva de Peano

A curva que se seguem constroem-se de uma forma idêntica à curva de Koch, variando o fator de redução de cada um dos segmentos relativos ao segmento inicial e automaticamente, o ângulo entre estes segmentos. A curva de Peano, apresentada em 1890, é um exemplo de um fractal que preenche o plano. Uma curva que preenche o plano passa por todos os pontos de uma determinada área, acabando por, gradualmente, a ocupar na totalidade. O ponto de partida para a construção da curva de Peano é um segmento. Na 1ª iteração, o segmento é substituído por 9 segmentos de comprimento igual a um terço do comprimento do segmento inicial, e colocados como indica a primeira imagem da figura 3.5. Esses 9 segmentos constituem a 1ª iteração da construção recursiva da curva de Peano.

Depois, o processo recursivo aplica-se a cada um dos nove segmentos, até o infinito. Observa-se que as curvas obtidas nas diferentes iterações da recursão, a partir da primeira, intersectam-se a si próprias nos vértices dos pequenos quadrados que se vão formando em cada iteração. Pode-se demonstrar que no limite, isto é, na curva de Peano, se passa o mesmo, dando-se o preenchimento do plano.

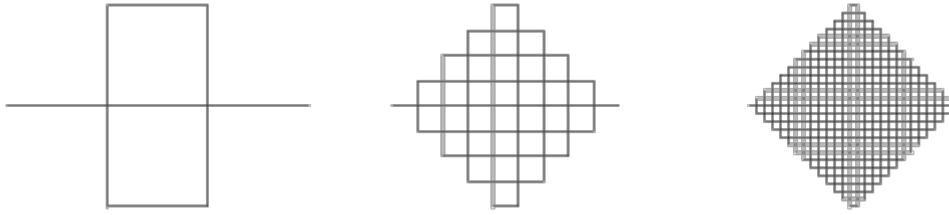


Figura 3.5: Curva de Peano

Dimensão D, onde

$$\begin{aligned}
 D &= \log N / (\log(1/r)) \\
 &= \log 9 / (\log(1/(1/3))) \\
 &= (\log 3^2) / (\log(3)) \\
 &= (2 \cdot \log 3) / (\log(3)) \\
 &= 2
 \end{aligned}$$

### 3.4.1 Curva de Peano e contagem

Dessa forma podemos perceber que nesse processo iterativo de construção da curva de Peano temos:

- Na iteração zero, um segmento (ou  $9^0$  segmentos);
- Na iteração um, nove segmentos (ou  $9^1$  segmentos);
- Na iteração dois, oitenta e um segmentos (ou  $9^2$  segmentos);
- Na iteração três, temos 729 segmentos (ou  $9^3$  segmentos);
- Na iteração quatro, temos 6561 segmentos (ou  $9^4$  segmentos) e assim sucessivamente, obtendo para “n” iterações  $9^n$  segmentos.

Como  $9 > 1$ , podemos inferir que a partir do momento que “n” tende ao infinito, o número de segmentos tende ao infinito.

Nesta curva de Peano perceberemos que a quantidade de segmentos restantes após cada iteração, constituirá uma sequência do tipo P.G (progressão geométrica) de razão 9, de tal forma que a quantidade de segmentos no conjunto de todas as iterações será dada pela soma dos termos dessa sequência.

### 3.4.2 Perímetro na curva de Peano

Como o ponto de partida para a construção da curva de Peano é um segmento e sabendo que em cada iteração a partir da primeira, os segmentos anteriores são substituídos por nove segmentos menores de mesmo comprimento e assim infinitamente, neste contexto tomando “C” como o comprimento inicial na iteração zero podemos então inferir que:

- Na iteração zero, temos um segmento (ou  $9^0$  segmentos) e o perímetro é dado por:

$$P_0 = C$$

- Na iteração um, temos nove segmentos (ou  $9^1$  segmentos) cujo perímetro é:

$$\begin{aligned} P_1 &= 9 \cdot \frac{C}{3} \\ &= C \cdot 3^1 \end{aligned}$$

- Na iteração dois, oitenta e um segmentos (ou  $9^2$  segmentos) de perímetro:

$$\begin{aligned} P_2 &= 81 \cdot \frac{C}{9} \\ &= 9C \\ &= C \cdot 3^2 \end{aligned}$$

- Na iteração três, temos 729 segmentos (ou  $9^3$  segmentos) de perímetro:

$$\begin{aligned} P_3 &= 729 \cdot \frac{C}{27} \\ &= 27C \\ &= C \cdot 3^3 \end{aligned}$$

- Na iteração quatro, temos 6561 segmentos (ou  $9^4$  segmentos) de perímetro:

$$\begin{aligned} P_4 &= 6561 \cdot \frac{C}{81} \\ &= 81C \\ &= C \cdot 3^4 \end{aligned}$$

Podemos agora inferir para “n” iterações que o perímetro pode ser obtido por:

$$\begin{aligned} P_n &= 9^n \cdot \frac{C}{3} \\ &= 3^{2n} \cdot \frac{C}{3^n} \\ &= C \cdot 3^n \end{aligned}$$

Como  $3 > 1$  temos que o perímetro tende ao infinito, quando o número “n” de iterações tende ao infinito.

Podemos observar ainda que a cada iteração o perímetro é definido por uma P.G. de razão 3.

### 3.4.3 Área na curva de Peano

Para determinamos a área ocupada por essa curva, observamos que na iteração um temos dois quadrados, na iteração dois temos 32 quadrados, na iteração três temos 338 quadrados. Dessa forma a cada iteração a curva vai ocupando uma região quadrangular (quadrada) do plano (figura 3.5), de onde o segmento inicial na iteração zero tornar-se-á a diagonal dessa região para “n” muito grande. Assim obtemos que a área (A) dessa região pode ser denotada por  $A = L^2$ , de onde temos pelo Teorema de Pitágoras que  $L = \sqrt{C/2}$ . Daí  $A = (\sqrt{C/2})^2 = C/2$

## 3.5 A ilha de Minkowski

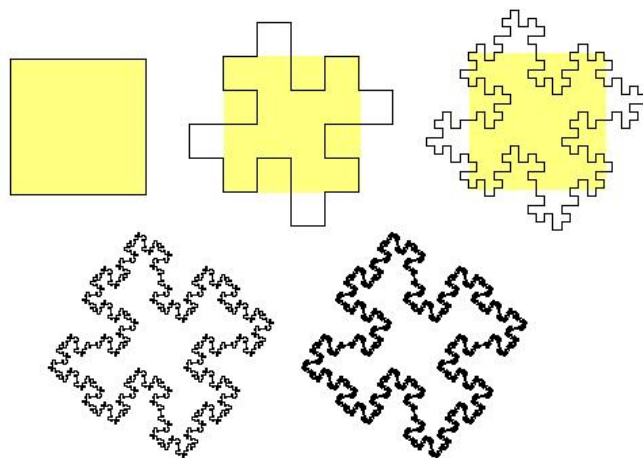


Figura 3.6: A ilha de Minkowski

Dimensão D, onde

$$\begin{aligned}
 D &= \log N / (\log(1/r)) \\
 &= \log 8 / (\log(1/(1/4))) \\
 &= (\log 2^3) / (\log(4)) \\
 &= (3 \cdot \log 2) / (\log(2^2)) \\
 &= (3 \cdot \log 2) / (2 \cdot \log(2)) \\
 &= 3/2 \\
 &= 1,5
 \end{aligned}$$

Para a construção dessa curva partiremos de um quadrado com lado de comprimento “C” que será submetido a alterações recorrentes (iterações), como a seguir descrevemos:

1. Divide-se cada lado desse quadrado em quatro segmentos de igual comprimento ( $\frac{C}{4}$ )
2. A partir dos dois segmentos centrais construiremos dois quadrados, um interno e outro externo a região do quadrado inicialmente considerada. Cada um destes novos quadrados com lado de comprimento  $\frac{C}{4}$ .
3. Suprimimos os dois segmentos centrais de cada lado considerado no passo dois.
4. Procederemos agora repetindo as operações referidas nas etapas um, dois e três para cada um dos segmentos restantes.

### 3.5.1 A ilha de Minkowski e contagem

Analisando as etapas de construção dessa curva inferimos que:

- Na iteração zero, teremos 4 segmentos (ou  $4 \cdot 8^0$  segmentos);
- Na iteração um, teremos 32 segmentos (ou  $4 \cdot 8^1$  segmentos);
- Na iteração dois, teremos 256 segmentos (ou  $4 \cdot 8^2$  segmentos);
- Na iteração três, teremos 2048 segmentos (ou  $4 \cdot 8^3$  segmentos);
- Na iteração quatro, teremos 16384 segmentos (ou  $4 \cdot 8^4$  segmentos) e assim por diante, o que nos faz inferir que na iteração “n” teremos  $4 \cdot 8^n$  segmentos.

Como  $8 > 1$ , percebemos que a partir do momento que “n” tende ao infinito, o número de segmentos tende ao infinito.

Dessa forma a quantidade de segmentos provenientes em cada iteração na ilha de Minkowski, constituirá uma sequência do tipo P.G. (progressão geométrica) de razão 8, assim temos que a quantidade de segmentos no conjunto de todas as iterações será dada pela soma dos termos dessa sequência.

### 3.5.2 Perímetro na ilha de Minkowski

Analisando o procedimento de construção desse fractal percebemos que em cada iteração, o perímetro da linha aumenta (tendendo para o infinito), assim:

- Na iteração zero, teremos 4 segmentos (ou  $4.8^0$  segmentos) de comprimento C cada um, cujo perímetro é dado por:

$$\begin{aligned}P_0 &= 4C \\ &= 2^2.C \\ &= 2^{0+2}.C\end{aligned}$$

- Na iteração um, teremos 32 segmentos (ou  $4.8^1$  segmentos) de comprimento  $C/4$  ( $\frac{C}{4^1}$ ) cada um, cujo perímetro é dado por:

$$\begin{aligned}P_1 &= 32.\left(\frac{C}{4}\right) \\ &= 8C \\ &= 2^3.C \\ &= 2^{1+2}.C\end{aligned}$$

- Na iteração dois, teremos 256 segmentos (ou  $4.8^2$  segmentos) de comprimento  $C/16$  ( $\frac{C}{4^2}$ ) cada um, cujo perímetro é dado por:

$$\begin{aligned}P_2 &= 256.\left(\frac{C}{16}\right) \\ &= 16C \\ &= 2^4.C \\ &= 2^{2+2}.C\end{aligned}$$

- Na iteração três, teremos 2048 segmentos (ou  $4.8^3$  segmentos) de comprimento  $C/64$  ( $\frac{C}{4^3}$ ) cada um, cujo perímetro é dado por:

$$\begin{aligned}P_3 &= 2048 \cdot \left(\frac{C}{64}\right) \\ &= 32C \\ &= 2^5 \cdot C \\ &= 2^{3+2} \cdot C\end{aligned}$$

- Na iteração quatro, teremos 16384 segmentos (ou  $4.8^4$  segmentos) de comprimento  $C/256$  ( $\frac{C}{4^4}$ ) cada um, cujo perímetro é dado por:

$$\begin{aligned}P_4 &= 16384 \cdot \left(\frac{C}{256}\right) \\ &= 64C \\ &= 2^6 \cdot C \\ &= 2^{4+2} \cdot C\end{aligned}$$

Desta forma podemos inferir que na iteração “n” teremos  $4.8^n$  segmentos de comprimento ( $\frac{C}{4^n}$ ) cada um, cujo perímetro é dado por:

$$\begin{aligned}P_n &= 4.8^n \cdot \left(\frac{C}{4^n}\right) \\ &= 4 \cdot \left(\frac{8}{4}\right)^n \cdot C \\ &= 2^2 \cdot 2^n \cdot C \\ &= 2^{n+2} \cdot C\end{aligned}$$

Como  $2 > 1$ , percebemos que a partir do momento que “n” tende ao infinito, o perímetro desse fractal tende ao infinito.

Notemos que o perímetro dessa curva proveniente de cada iteração na ilha de Minkowski, constituirá uma sequência do tipo P.G. (progressão geométrica) de razão 2.

### 3.5.3 Área na ilha de Minkowski

Analisando as etapas de construção dessa curva, perceberemos que à medida que o número de iterações “n” cresce o perímetro aumenta e a área permanece constante.



### 3.6 O triângulo de Sierpinski

Waclaw Sierpinski (1882 - 1969), matemático polonês, que foi professor em Lvov e Warsaw, em 1915 descreveu o Triângulo de Sierpinski. Este triângulo é obtido como limite de um processo recursivo. Para começar o processo partimos de um triângulo equilátero. Em seguida unem-se os pontos médios de cada lado do triângulo, formando quatro triângulos cujos lados estão ligados. Retira-se agora o triângulo central. A recursão consiste em repetir indefinidamente o procedimento anterior em relação a cada um dos triângulos obtidos. O triângulo de Sierpinski tem várias propriedades curiosas como a de ter tantos pontos como o dos conjuntos dos números reais, ter área igual a zero, ser autossemelhante (isto é, uma pequena porção do triângulo é idêntica ao triângulo todo a menos de uma escala adequada) e não perder a sua definição inicial à medida que é ampliado.



Figura 3.7: O triângulo de Sierpinski

Dimensão D, onde

$$\begin{aligned}
 D &= \log N / (\log(1/r)) \\
 &= \log 3 / (\log(1/(1/2))) \\
 &= (\log 3) / (\log 2) \\
 &= 1,584...
 \end{aligned}$$

Uma das maneiras de se obter um triângulo de Sierpinski é através do seguinte algoritmo:

1. Comece com qualquer triângulo em um plano. O triângulo de Sierpinski canônico utilizava um triângulo equilátero com a base paralela ao eixo horizontal, mas qualquer triângulo pode ser usado. (ver figura 3.7.1).
2. Marque o ponto médio em cada lado desse triângulo, interligue esses pontos e retire a região delimitada por eles. (ver figura 3.7.2).

3. Repita o passo 2 para cada figura obtida, indefinidamente. (ver a partir da figura 3.7.3)

Embora no processo acima a figura inicial seja um triângulo, não é necessário partir de um para se chegar ao triângulo de Sierpinski. É possível utilizar qualquer figura geométrica (ver figura abaixo), o triângulo só é utilizado para facilitar a visualização.

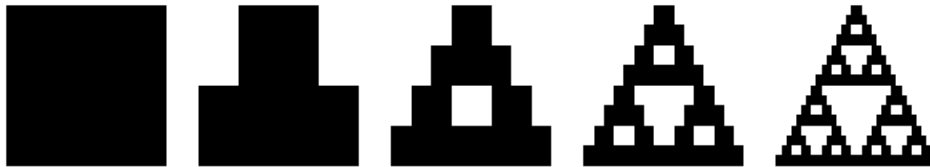


Figura 3.8: O triângulo de Sierpinski a partir de um quadrado

O fractal propriamente dito só é obtido quando o processo de algoritmo é repetido infinitas vezes, mas conforme o número de iterações aumenta, a imagem obtida tende a se tornar cada vez mais parecida com o fractal.

### 3.6.1 O triângulo de Sierpinski e contagem

Acompanhado as etapas de construção desse fractal, perceberemos que:

- Na iteração zero, temos 1 triângulo (ou  $3^0$  triângulo);
- Na iteração um, três triângulos (ou  $3^1$  triângulos);
- Na iteração dois, nove triângulos (ou  $3^2$  triângulos);
- Na iteração três, vinte e sete triângulos (ou  $3^3$  triângulos);
- Na iteração quatro, 81 triângulos (ou  $3^4$  triângulos), desta forma para “n” iterações temos  $3^n$  triângulos.

Como  $3 > 1$ , percebemos que a partir do momento que “n” tende ao infinito, o número de triângulos tende ao infinito.

Desta forma a quantidade de triângulos provenientes após cada iteração, constituirá uma sequência do tipo P.G. (progressão geométrica) de razão 3, assim temos que a quantidade de triângulos no conjunto de todas as iterações será dada pela soma dos termos dessa sequência.

### 3.6.2 Relação entre o triângulo de Sierpinski e o triângulo de Pascal

Também existe uma relação com o triângulo de Pascal. Montando o triângulo de Pascal com  $2^n$  linhas, e pintando os números pares de branco e os números ímpares de preto, a figura obtida a seguir será uma aproximação do triângulo de Sierpinski.

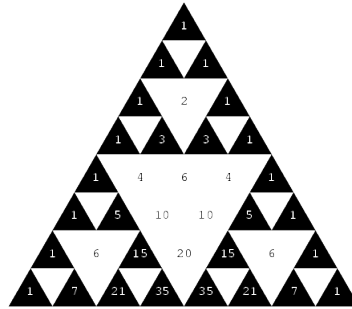


Figura 3.9: O triângulo de Sierpinski/Pascal

O triângulo de Pascal “transforma-se” assim no triângulo de Sierpinski.

Mas esta não é a única relação interessante que podemos obter com o triângulo de Pascal. Considerando, por exemplo, os restos da divisão por cinco dos elementos do triângulo de Pascal. Se retirarmos os elementos cujos restos são zero e colorirmos de vermelho, verde, azul e amarelo os elementos cujos restos são 1, 2, 3 e 4 respectivamente, obtemos a figura 3.10. Mas estes são apenas dois exemplos, podemos encontrar muitos

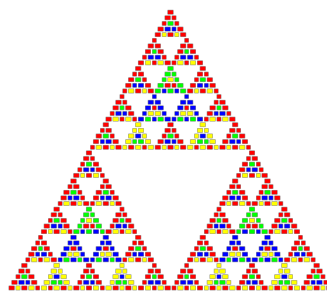


Figura 3.10: O triângulo de Sierpinski/Pascal (divisão por cinco)

outros.

### 3.6.3 Perímetro no triângulo de Sierpinski

Acompanhado as etapas de construção desse fractal e tomando “C” como o comprimento do lado deste triângulo (figura 3.5), perceberemos que:

- Na iteração zero, temos 1 triângulo (ou  $3^0$  triângulo de lado  $C$ ) cujo perímetro é:

$$P_0 = 3C$$

- Na iteração um, teremos três triângulos (ou  $3^1$  triângulos de lado  $\frac{C}{2}$ ) de perímetro:

$$\begin{aligned} P_1 &= 3 \cdot 3 \cdot \frac{C}{2} \\ &= 3C \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^1 \end{aligned}$$

- Na iteração dois, teremos nove triângulos de lado  $\frac{C}{4}$  (ou  $3^2$  triângulos de lado  $\frac{C}{2^2}$ ) de perímetro:

$$\begin{aligned} P_2 &= 9 \cdot 3 \cdot \frac{C}{4} \\ &= 3^2 \cdot 3 \cdot \frac{C}{2^2} \\ &= 3C \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

- Na iteração três, vinte e sete triângulos de lado  $\frac{C}{8}$  (ou  $3^3$  triângulos de lado  $\frac{C}{2^3}$ ) de perímetro:

$$\begin{aligned} P_3 &= 27 \cdot 3 \cdot \frac{C}{8} \\ &= 3^3 \cdot 3 \cdot \frac{C}{2^3} \\ &= 3C \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3 \end{aligned}$$

- Na iteração quatro, 81 triângulos de lado  $\frac{C}{16}$  (ou  $3^4$  triângulos de lado  $\frac{C}{2^4}$ ) de perímetro:

$$\begin{aligned} P_4 &= 81 \cdot 3 \cdot \frac{C}{16} \\ &= 3^4 \cdot 3 \cdot \frac{C}{2^4} \\ &= 3C \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^4 \end{aligned}$$

Desta forma para “n” iterações teremos  $3^n$  triângulos de lado  $\frac{C}{2^n}$  cujo perímetro será dado por:

$$\begin{aligned} P_n &= 3^n \cdot 3 \cdot \frac{C}{2^n} \\ &= 3C \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n \end{aligned}$$

Como  $(3/2) > 1$ , percebemos que a partir do momento que “n” tende ao infinito, o perímetro tende ao infinito. Podemos observar ainda que após cada iteração o perímetro fica definido por uma P.G. de razão  $3/2$ .

### 3.6.4 Área no triângulo de Sierpinski

Acompanhado as etapas de construção desse fractal e tomando “A” como a área do triângulo equilátero na iteração zero, perceberemos que:

- Na iteração zero, temos 1 triângulo (ou  $3^0$  triângulo) de área

$$A_0 = A$$

- Na iteração um, temos três triângulos (ou  $3^1$  triângulos) de área  $\frac{A}{4}$  cada um, daí:

$$\begin{aligned} A_1 &= 3 \cdot \frac{A}{4} \\ &= \frac{3}{4} \cdot A \end{aligned}$$

- Na iteração dois, nove triângulos (ou  $3^2$  triângulos) de área  $\frac{A}{16}$  cada um, daí:

$$\begin{aligned} A_2 &= 9 \cdot \frac{A}{16} \\ &= 3^2 \cdot \frac{A}{4^2} \\ &= \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot A \end{aligned}$$

- Na iteração três, vinte e sete triângulos (ou  $3^3$  triângulos) de área  $\frac{A}{64}$  cada um, daí:

$$\begin{aligned} A_3 &= 27 \cdot \frac{A}{64} \\ &= 3^3 \cdot \frac{A}{4^3} \\ &= \left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot A \end{aligned}$$

- Na iteração quatro, 81 triângulos (ou  $3^4$  triângulos) de área  $\frac{A}{256}$  cada um, daí:

$$\begin{aligned} A_4 &= 81 \cdot \frac{A}{256} \\ &= 3^4 \cdot \frac{A}{4^4} \\ &= \left(\frac{3}{4}\right)^4 \cdot A \end{aligned}$$

Desta forma para "n" iterações temos  $3^n$  triângulos de área  $\frac{A}{4^n}$  cada um, daí:

$$\begin{aligned} A_n &= 3^n \cdot \frac{A}{4^n} \\ &= \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot A \end{aligned}$$

Como  $(3/4) < 1$ , percebemos que a partir do momento que "n" tende ao infinito, a área de um triângulo de Sierpinski tende a zero. Isso pode ser percebido quando observamos que, a cada iteração, a área da figura obtida foi reduzida em 25% em relação à área da figura original.

Desta forma a área de todos os triângulos provenientes após cada iteração, constituirá uma sequência do tipo P.G. (progressão geométrica) de razão  $3/4$ .

### 3.7 A esponja de Menger

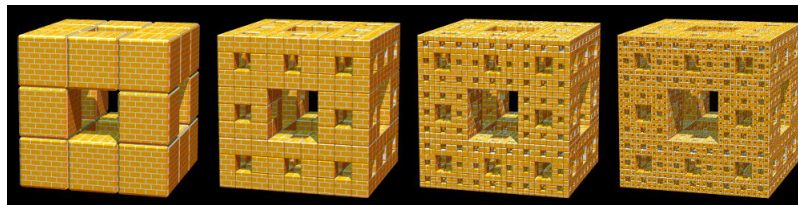


Figura 3.11: A esponja de Menger

$$\begin{aligned} \text{Dimensão } D, \text{ onde } D &= \log N / (\log(1/r)) \\ &= \log 20 / (\log(1/(1/3))) \\ &= (\log 20) / (\log 3) \\ &= 2,726... \end{aligned}$$

Podemos iniciar a construção deste fractal a partir de um cubo de aresta "A" para a iteração zero, que será submetido a alterações recorrentes, de acordo com as seguintes etapas:

1. Divide-se o cubo em 27 cubos menores congruentes de aresta  $A/3$ , em seguida retiramos o cubo central e os cubos centrais de cada face.
2. Repetiremos esse procedimento para os 20 cubos restantes e continuamos a fazer esse processo recursivo infinitas vezes.

### 3.7.1 A esponja de Menger e contagem

Considerando o procedimento descrito acima, obtemos:

- Para a iteração um, 20 (ou  $20^1$ ) cubos;
- Para a iteração dois, 400 (ou  $20^2$ ) cubos;
- Para a iteração três, 8000 (ou  $20^3$ ) cubos, assim para a iteração “n” teremos  $20^n$  cubos.

Como  $20 > 1$ , percebemos que a partir do momento que “n” tende ao infinito, o número de cubos tende ao infinito.

Desta forma a quantidade de cubos provenientes após cada iteração, constituirá uma sequência do tipo P.G. (progressão geométrica) de razão 20.

Outra contagem que poderíamos apreciar diz respeito a retiradas dos cubos em cada iteração, o que nos faz concluir que:

- Para a iteração um, 7 cubos;
- Para a iteração dois, 7. 20 cubos;
- Para a iteração três 7. 400 (ou  $7.20^2$ ) cubos, assim para a iteração “n” teremos  $7.20^{n-1}$  cubos.

Como  $20 > 1$ , percebemos que a partir do momento que “n” tende ao infinito, o número de cubos retirados também tende ao infinito.

Desta forma a quantidade de cubos retirados provenientes após cada iteração, constituirá uma sequência do tipo P.G. (progressão geométrica) de razão 20.

### 3.7.2 Perímetro na esponja de Menger

Observando a construção da esponja de Menger, concluímos que:

- Na iteração zero obtemos doze arestas de comprimento “A” cada uma, assim teremos um perímetro:

$$P_0 = 12A$$

- Na iteração um devemos considerar apenas os seis cubos das faces cuja aresta é de  $A/3$  cada uma, como cada cubo menor tem doze arestas com comprimento  $A/3$  teremos um aumento no perímetro inicial de  $6 \cdot 12 \cdot \frac{A}{3}$ . Daí o perímetro será dado por:

$$P_1 = 12A + 6 \cdot 12 \cdot \frac{A}{3}$$

- Na iteração dois são retirados  $7 \cdot 20$  cubos de aresta  $A/9$  cada um, no entanto devemos considerar apenas os  $6 \cdot 20$  cubos retirados, como cada cubo menor nessa iteração têm doze arestas com comprimento  $A/9$  teremos um aumento no perímetro anterior de  $6 \cdot 20 \cdot 12 \cdot \frac{A}{9}$ . Daí o perímetro será dado por:

$$\begin{aligned} P_2 &= 12A + 6 \cdot 12 \cdot \frac{A}{3} + 6 \cdot 20 \cdot 12 \cdot \frac{A}{9} \\ &= 12A + 6 \cdot 12A \left( \frac{1}{3} + \frac{20}{9} \right) \end{aligned}$$

- Na iteração três são retirados  $7 \cdot 20^2$  cubos de aresta  $A/27$  cada um, novamente vamos considerar apenas os  $6 \cdot 20^2$  cubos retirados, dessa forma cada cubo menor nessa iteração têm doze arestas com comprimento  $A/27$ , assim teremos um aumento no perímetro anterior de  $6 \cdot (20)^2 \cdot 12 \cdot \frac{A}{27}$ . Daí o perímetro será dado por:

$$\begin{aligned} P_3 &= 12A + 6 \cdot 12 \cdot \frac{A}{3} + 6 \cdot 20 \cdot 12 \cdot \frac{A}{9} + 6 \cdot (20)^2 \cdot 12 \cdot \frac{A}{27} \\ &= 12A + 6 \cdot 12A \left( \frac{1}{3} + \frac{20}{9} + \frac{20^2}{27} \right) \end{aligned}$$

Assim para a iteração “n” são retirados  $7 \cdot 20^{n-1}$  cubos dos quais devemos considerar  $6 \cdot 20^{n-1}$  cubos de aresta  $\frac{A}{3^n}$  cada um.

Dessa forma a cada iteração teremos um aumento do perímetro em relação ao anterior de  $6 \cdot (20)^{n-1} \cdot 12 \cdot \frac{A}{3^n}$ . Daí o perímetro da esponja de Menger é dado por:

$$\begin{aligned} P_n &= 12A + 6 \cdot 12 \cdot \frac{A}{3} + 6 \cdot 20 \cdot 12 \cdot \frac{A}{9} + \dots + 6 \cdot (20)^{n-1} \cdot 12 \cdot \frac{A}{3^n} \\ &= 12A + 6 \cdot 12A \left( \frac{1}{3} + \frac{20}{9} + \dots + \frac{(20)^{n-1}}{3^n} \right) \end{aligned}$$

Observamos que a sequência  $\frac{1}{3}, \frac{20}{9}, \dots, \frac{(20)^{n-1}}{3^n}$  é uma P.G. de razão  $20/3$ , assim temos:

$$\begin{aligned} P_n &= 12A + 6 \cdot 12A \cdot \left( \frac{1}{3} \cdot \left( \frac{(20)^{n-1}}{\frac{20}{3}-1} \right) \right) \\ &= 12A + 6 \cdot 12A \cdot \left( \frac{1}{3} \cdot \left( \frac{(20)^{n-1}}{\frac{17}{3}} \right) \right) \\ &= 12A + 6 \cdot 12A \cdot \left( \frac{(20)^{n-1}}{17} \right) \end{aligned}$$



Como  $(20/3) > 1$ , percebemos que a partir do momento que “n” tende ao infinito, o perímetro também tende ao infinito.

### 3.7.3 Área na esponja de Menger

Tomemos agora “S” como sendo a área de uma das faces quadradas do cubo, daí temos na iteração zero uma área  $S_0 = 6S$ .

- Na iteração um devemos considerar os seis cubos menores retirados das seis faces laterais do cubo original, dessa forma serão retirados da área inicial  $6 \cdot \frac{S}{9}$ , pois cada quadrado menor em cada face tem área  $S/9$  em relação área do quadrado da face inicial do cubo original. No entanto ao retirarmos os seis cubos menores, cada um deixa uma vala quadrada na respectiva face de onde o mesmo foi removido, deixando assim uma área a ser acrescentada de  $6 \cdot 4 \cdot \frac{S}{9}$ . Inferimos então que a área nessa iteração é dada por:

$$\begin{aligned}
 S_1 &= 6S + 6 \cdot 4 \cdot \frac{S}{9} - 6 \cdot \frac{S}{9} \\
 &= 6S + 6S \cdot \left( \frac{4}{9} - \frac{1}{9} \right) \\
 &= 6S + 6S \cdot \frac{3}{9} \\
 &= 6S + 6S \cdot \frac{1}{3} \\
 &= 6S \left( 1 + \frac{1}{3} \right) \\
 &= 6S \left( \frac{4}{3} \right) \\
 &= 8S
 \end{aligned}$$

- Na iteração dois devemos considerar os 6.20 cubos retirados das faces dos vinte cubos que restaram da iteração um, cada um deixa uma vala quadrada na respectiva face de onde o mesmo foi removido, deixando assim uma área a ser acrescentada de  $6 \cdot 20 \cdot 4 \cdot \frac{S}{9^2}$  e devemos retirar uma área de  $8 \cdot 6 \cdot \frac{S}{9^2}$  e  $4 \cdot 6 \cdot \frac{S}{9^2}$  referentes aos quadrados suprimidos das faces da iteração dois e da supressão dos quadrados das valas inseridas da iteração

um. Daí concluímos que a área nessa iteração é dada por:

$$\begin{aligned}
 S_2 &= S_1 + 6 \cdot 20 \cdot 4 \frac{S}{9^2} - 8 \cdot 6 \cdot \frac{S}{9^2} - 4 \cdot 6 \cdot \frac{S}{9^2} \\
 &= S_1 + 6 \cdot 20 \cdot 4 \cdot \frac{S}{9^2} - 12 \cdot 6 \cdot \frac{S}{9^2} \\
 &= S_1 + 6 \cdot 20 \cdot 4 \cdot \frac{S}{9^2} - 6 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{S}{9^2} \\
 &= S_1 + 6 \cdot 4 \cdot S \cdot \left( \frac{20}{9^2} - \frac{3}{9^2} \right) \\
 &= 6S + 6S \cdot \frac{1}{3} + 6 \cdot 4 \cdot S \cdot \left( \frac{17}{9^2} \right) \\
 &= 6S + 6S \cdot \left( \frac{1}{3} + 4 \cdot \frac{17}{9^2} \right)
 \end{aligned}$$

- Na iteração três devemos considerar os  $6 \cdot 20^2$  cubos retirados das faces dos quatrocentos cubos que restaram da iteração dois, cada um deixa uma vala quadrada na respectiva face de onde o mesmo foi removido, deixando assim uma área a ser acrescentada de  $6 \cdot 20^2 \cdot 4 \cdot \frac{S}{9^3}$  e devemos retirar uma área de  $8 \cdot 8 \cdot 6 \cdot \frac{S}{9^3}$ ,  $8 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \frac{S}{9^3}$  e  $4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \frac{S}{9^3}$  referentes aos quadrados suprimidos das faces da iteração três e da supressão dos quadrados das valas inseridas da iteração dois e da iteração um. Daí concluímos que a área nessa iteração é dada por:

$$\begin{aligned}
 S_3 &= S_2 + 6 \cdot 20^2 \cdot 4 \frac{S}{9^3} - 8 \cdot 8 \cdot 6 \cdot \frac{S}{9^3} - 8 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \frac{S}{9^3} - 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \frac{S}{9^3} \\
 &= S_2 + 6 \cdot S \cdot \left( \frac{20^2 \cdot 4}{9^3} - \frac{8 \cdot 8}{9^3} - \frac{8 \cdot 4}{9^3} - \frac{4 \cdot 4}{9^3} \right) \\
 &= 6S + 6S \cdot \left( \frac{1}{3} + 4 \cdot \frac{17}{9^2} \right) + 6 \cdot S \cdot \left( \frac{1488}{9^3} \right) \\
 &= 6S + 6S \cdot \left( \frac{1}{3} + 4 \cdot \frac{17}{9^2} + \frac{1488}{9^3} \right) \\
 &= 6S + 6S \cdot \left( \frac{1}{3} + \frac{4 \cdot 17}{9^2} + \frac{4 \cdot 372}{9^3} \right)
 \end{aligned}$$

Assim para a iteração “n” devemos considerar os  $6 \cdot 20^{n-1}$  cubos retirados das faces dos  $20^{n-1}$  cubos que restaram da iteração anterior, cada um deixa uma vala quadrada na respectiva face de onde o mesmo foi removido, deixando assim uma área a ser acrescentada de  $6 \cdot 20^{n-1} \cdot 4 \cdot \frac{S}{9^n}$  e devemos retirar  $8^{n-1} \cdot 6 \cdot \frac{S}{9^n}$ ,  $8^{n-2} \cdot 4 \cdot 6 \cdot \frac{S}{9^n}$ , ...,  $4^{n-1} \cdot 6 \cdot \frac{S}{9^n}$ , referentes aos quadrados suprimidos das faces da iteração “n” e da supressão dos quadrados das valas inseridas da iteração n-1, n-2, ..., 2 e da iteração um.

Daí concluímos que a área na iteração “n” é dada por:

$$S_n = S_{n-1} + 6 \cdot 20^{n-1} \cdot 4 \frac{S}{9^n} - \left( 8^{n-1} \cdot 6 \cdot \frac{S}{9^n} + 8^{n-2} \cdot 4 \cdot 6 \cdot \frac{S}{9^n} + \dots + 4^{n-2} \cdot 8 \cdot 6 \cdot \frac{S}{9^n} + 4^{n-1} \cdot 6 \cdot \frac{S}{9^n} \right)$$

Dessa forma a cada iteração teremos um aumento da área posterior em relação à área anterior, inferindo assim que a área da esponja de Menger tende ao infinito quando “n” tende ao infinito.

### 3.7.4 Volume na esponja de Menger

Seja “V” o volume do cubo considerado para a construção da esponja de Menger, obtemos que:

- Na iteração zero temos um volume  $V_0 = V$
- Na iteração um observamos que foram retirados sete cubos de volume  $v_1 = \frac{V}{27}$  cada um, pois nessa iteração a aresta de cada cubo menor é  $A/3$ . Dessa forma na iteração um será retirado um volume equivalente a  $7v_1$ , logo podemos denotar o volume na iteração um por:

$$\begin{aligned} V_1 &= V - 7v_1 \\ &= V - 7 \cdot \frac{V}{27} \\ &= V \cdot \left(1 - \frac{7}{27}\right) \end{aligned}$$

- Na iteração dois são retirados 7.20 cubos de aresta  $A/9$  dos vinte cubos restantes da iteração anterior, cada um com volume  $v_2 = \frac{V}{729} = \frac{V}{27^2}$ . Dessa forma na iteração dois será retirado um volume da iteração anterior equivalente a  $7.20.v_2$ , daí temos:

$$\begin{aligned} V_2 &= V - 7v_1 - 7.20v_2 \\ &= V - 7 \cdot \frac{V}{27} - 7.20 \cdot \frac{V}{27^2} \\ &= V - 7V \cdot \left(\frac{1}{27} + \frac{20}{27^2}\right) \end{aligned}$$

- Na iteração três são retirados  $7.20^2$  cubos de aresta  $A/27$  dos quatrocentos cubos restantes da iteração anterior, cada um com volume  $v_3 = \frac{V}{27^3}$ . Dessa forma nessa iteração será retirado um volume da iteração anterior equivalente a  $7.20^2.v_3$ , daí temos:

$$\begin{aligned} V_3 &= V - 7v_1 - 7.20v_2 - 7.20^2.v_3 \\ &= V - 7 \cdot \frac{V}{27} - 7.20 \cdot \frac{V}{27^2} - 7.20^2 \cdot \frac{V}{27^3} \\ &= V - 7V \cdot \left(\frac{1}{27} + \frac{20}{27^2} + \frac{20^2}{27^3}\right) \end{aligned}$$

Assim para a iteração “n” são retirados  $7 \cdot 20^{n-1}$  cubos de aresta  $\frac{A}{3^n}$  dos  $20^{n-1}$  cubos restantes da iteração anterior, cada um com volume  $v_n = \frac{V}{27^n}$ . Dessa forma será retirado um volume da iteração anterior equivalente a  $7 \cdot 20^{n-1} \cdot v_n$ , daí temos:

$$\begin{aligned} V_n &= V - 7v_1 - 7 \cdot 20v_2 - 7 \cdot 20^2 \cdot v_3 - \dots - 7 \cdot 20^{n-1} \cdot v_n \\ &= V - 7 \cdot \frac{V}{27} - 7 \cdot 20 \cdot \frac{V}{27^2} - 7 \cdot 20^2 \cdot \frac{V}{27^3} - \dots - 7 \cdot 20^{n-1} \cdot \frac{V}{27^n} \\ &= V - 7V \cdot \left( \frac{1}{27} + \frac{20}{27^2} + \frac{20^2}{27^3} + \dots + \frac{20^{n-1}}{27^n} \right) \end{aligned}$$

Notemos que a sequência  $(\frac{1}{27}, \frac{20}{27^2}, \frac{20^2}{27^3}, \dots, \frac{20^{n-1}}{27^n})$  é uma progressão geométrica de razão  $20/27$ , daí:

$$V_n = V - 7V \left( \frac{1}{27} \cdot \left( \frac{\left(\frac{20}{27}\right)^n - 1}{\frac{20}{27} - 1} \right) \right)$$

Desta forma podemos perceber que quando “n” tende ao infinito o termo  $(\frac{20}{27})^n$  tende a zero, nesse contexto podemos escrever:

$$\begin{aligned} V_n &= V - 7V \left( \frac{1}{27} \cdot \left( \frac{-1}{\frac{20}{27} - 1} \right) \right) \\ &= V - 7V \left( \frac{1}{27} \cdot \left( \frac{-1}{-\frac{7}{27}} \right) \right) \\ &= V - 7V \left( \frac{1}{27} \cdot \frac{27}{7} \right) \\ &= V - V \\ &= 0 \end{aligned}$$

Portanto concluímos que quando o número de iterações “n” tende ao infinito o volume da esponja de Menger tende a zero.

## 3.8 O tetraedro de Sierpinski

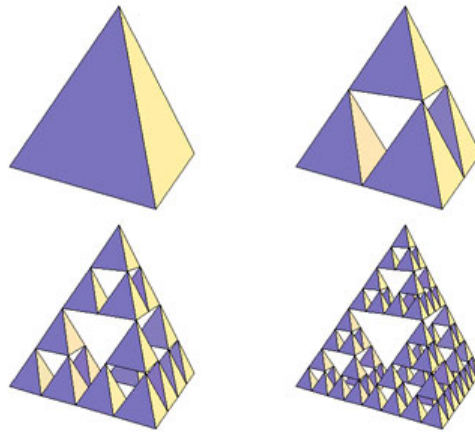


Figura 3.12: O tetraedro de Sierpinski

$$\begin{aligned}
 \text{Dimensão } D, \text{ onde } D &= \log N / (\log(1/r)) \\
 &= \log 4 / (\log(1/(1/2))) \\
 &= (\log 2^2) / (\log(2)) \\
 &= (2 \cdot \log 2) / (\log(2)) \\
 &= 2
 \end{aligned}$$

O tetraedro de Sierpinski é uma generalização no espaço do triângulo de Sierpinski. Neste caso temos um objeto no espaço tridimensional, com dimensão 2.

Para construirmos o tetraedro de Sierpinski, considere um tetraedro regular de aresta “A”, em cada aresta marque seu ponto médio interligando esses pontos. Retire o sólido delimitado por tais linhas, obtendo assim a primeira etapa na construção desse fractal. Repita esse procedimento para as demais etapas obtendo assim o fractal desejado.

### 3.8.1 O tetraedro de Sierpinski e contagem

Seguindo o método de construção desse fractal podemos inferir que:

- Na iteração zero temos um tetraedro (ou  $4^0$  tetraedros).
- Na iteração um temos quatro tetraedros (ou  $4^1$  tetraedros).

- Na iteração dois temos dezesseis tetraedros (ou  $4^2$  tetraedros).
- Na iteração três temos sessenta e quatro tetraedros (ou  $4^3$  tetraedros).

Seguindo as etapas de construção, para “n” iterações teremos  $4^n$  tetraedros.

Como  $4 > 1$ , percebemos que a partir do momento que “n” tende ao infinito, o número de tetraedros tende ao infinito.

Dessa forma a quantidade de tetraedros provenientes em cada iteração, constituirá uma sequência do tipo P.G. (progressão geométrica) de razão 4, assim temos que a quantidade de tetraedros no conjunto de todas as iterações será dada pela soma dos termos dessa sequência.

### 3.8.2 Perímetro no tetraedro de Sierpinski

Retomando o processo de construção desse fractal, perceberemos que na iteração zero teremos um perímetro  $P_0 = 6A = 3 \cdot 2 \cdot A$ , pois temos um (ou  $4^0$ ) tetraedro com seis arestas cada uma medindo  $\frac{A}{2^0}$ .

- Para a iteração um teremos um perímetro  $P_1 = 4 \cdot 6 \cdot \frac{A}{2^1} = 12A = 3 \cdot 2^2 A$ , pois nessa iteração temos quatro (ou  $4^1$ ) tetraedros menores, cada um com seis arestas de comprimento  $\frac{A}{2^1}$ .
- Na iteração dois teremos dezesseis (ou  $4^2$ ) tetraedros, cada um com seis arestas de comprimento  $\frac{A}{2^2}$ . Daí o perímetro pode ser dado por:  $P_2 = 16 \cdot 6 \cdot \frac{A}{4} = 24A = 3 \cdot 2^3 A$ .
- Na iteração três teremos 64 (ou  $4^3$ ) tetraedros, cada um com seis arestas de comprimento  $\frac{A}{2^3}$ . Daí o perímetro pode ser dado por:  $P_3 = 64 \cdot 6 \cdot \frac{A}{8} = 48A = 3 \cdot 2^4 A$ .

Dessa forma para a iteração “n” teremos  $4^n$  tetraedros cada um com seis arestas de comprimento  $\frac{A}{2^n}$ , logo teremos um perímetro dado por:  $P_n = 4^n \cdot 6 \cdot \frac{A}{2^n} = 3 \cdot 2^{n+1} A$ .

Como  $2 > 1$ , percebemos que a partir do momento que “n” tende ao infinito, o perímetro desse fractal tende ao infinito.

Dessa forma o perímetro desse fractal após cada iteração, constituirá uma sequência do tipo P.G. (progressão geométrica) de razão 2, ou seja o perímetro dobra após cada iteração.

### 3.8.3 Área no tetraedro de Sierpinski

Como o tetraedro de Sierpinski é uma generalização do triângulo de Sierpinski no espaço, seque-se que suas faces são formadas por triângulos equiláteros. Seja ainda “S” a área de uma dessas faces, logo podemos inferir que  $S = A^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ . Portanto a área desse fractal na iteração zero é  $S_0 = 4S = 4 \cdot A^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right) = A^2 \cdot \sqrt{3}$

Assim podemos concluir que:

- Na iteração um teremos uma área  $S_1 = 4 \cdot 4 \cdot \left(\frac{A}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right) = A^2 \cdot \sqrt{3}$
- Na iteração dois teremos uma área  $S_2 = 16 \cdot 4 \cdot \left(\frac{A}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right) = A^2 \cdot \sqrt{3}$
- Na iteração três teremos uma área  $S_3 = 64 \cdot 4 \cdot \left(\frac{A}{8}\right)^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right) = A^2 \cdot \sqrt{3}$

Portanto, na iteração “n” teremos uma área para o tetraedro de Sierpinski dada por:  $S_n = 4^n \cdot 4 \cdot \left(\frac{A}{2^n}\right)^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right) = A^2 \cdot \sqrt{3}$ , ou seja, a área nesse fractal é constante.

### 3.8.4 Volume no tetraedro de Sierpinski

Seja “A” a aresta do tetraedro na construção do tetraedro de Sierpinski na iteração zero, seja ainda “V” o volume desse tetraedro, assim temos que:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \cdot \left( \left( A^2 \left( \frac{\sqrt{3}}{4} \right) \right) \cdot \left( A \left( \frac{\sqrt{3}}{4} \right) \right) \right) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \left( A^3 \left( \frac{\sqrt{3 \cdot 6}}{4 \cdot 3} \right) \right) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \left( A^3 \left( \frac{3 \cdot \sqrt{2}}{12} \right) \right) \\ &= \left( A^3 \left( \frac{\sqrt{2}}{12} \right) \right) \end{aligned}$$

Portanto o volume desse fractal na iteração zero é  $V_0 = V = \left( A^3 \left( \frac{\sqrt{2}}{12} \right) \right)$ .

Seguindo esse procedimento:

- Na iteração um temos que a aresta é  $\frac{A}{2^1}$ , daí:

$$\begin{aligned} V_1 &= 4 \cdot \left( \left( \frac{A}{2^1} \right)^3 \cdot \left( \frac{\sqrt{2}}{12} \right) \right) \\ &= 4 \cdot \left( \frac{A^3}{8} \cdot \left( \frac{\sqrt{2}}{12} \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left( A^3 \cdot \left( \frac{\sqrt{2}}{12} \right) \right) \end{aligned}$$

- Na iteração dois temos que a aresta é  $\frac{A}{2^2}$ , daí:

$$\begin{aligned} V_2 &= 4^2 \cdot \left( \left( \frac{A}{2^2} \right)^3 \cdot \left( \frac{\sqrt{2}}{12} \right) \right) \\ &= 2^4 \cdot \left( \left( \frac{A^3}{2^6} \right) \cdot \left( \frac{\sqrt{2}}{12} \right) \right) \\ &= \frac{1}{2^2} \cdot \left( A^3 \cdot \left( \frac{\sqrt{2}}{12} \right) \right) \end{aligned}$$

- Na iteração três temos que a aresta é  $\frac{A}{2^3}$ , daí:

$$\begin{aligned} V_3 &= 4^3 \cdot \left( \left( \frac{A}{2^3} \right)^3 \cdot \left( \frac{\sqrt{2}}{12} \right) \right) \\ &= 2^6 \cdot \left( \left( \frac{A^3}{2^9} \right) \cdot \left( \frac{\sqrt{2}}{12} \right) \right) \\ &= \frac{1}{2^3} \cdot \left( A^3 \cdot \left( \frac{\sqrt{2}}{12} \right) \right) \end{aligned}$$

Analogamente para a iteração “n” teremos que a aresta mede  $\frac{A}{2^n}$ , daí:

$$\begin{aligned} V_n &= 4^n \cdot \left( \left( \frac{A}{2^n} \right)^3 \cdot \left( \frac{\sqrt{2}}{12} \right) \right) \\ &= 2^{2n} \cdot \left( \left( \frac{A^3}{2^{3n}} \right) \cdot \left( \frac{\sqrt{2}}{12} \right) \right) \\ &= \frac{1}{2^n} \cdot \left( A^3 \cdot \left( \frac{\sqrt{2}}{12} \right) \right) \end{aligned}$$

Em cada iteração, podemos perceber que a área total mantém-se constante à medida que o volume tende a zero.



# Capítulo 4

## Fractais versus alunos: construção e aprendizado

### 4.1 Coleta de dados

As informações que serão apresentadas foram coletadas na Escola de Ensino Médio Nazaré Severiano, no Município de Santana do Acaraú, Ceará, no período de fevereiro a setembro de 2018, tendo como público-alvo os alunos matriculados no ensino médio, em especial, discentes do primeiro ano dessa etapa de ensino.

Buscamos nessa pesquisa verificar as dificuldades, conflitos e desinteresses que desvincule o aprendizado do aluno e sua aceitação da introdução dos fractais como elemento facilitador dessa forma de aprendizagem.

Foram aplicadas aos alunos, em provas parciais ou bimestrais, questões envolvendo fractais em contexto com conteúdos usuais do ensino médio, buscando verificar a melhoria do aprendizado. Foram desenvolvidas também atividades de construção dos fractais envolvendo conteúdos dentre outros como contagem, perímetros, áreas e volumes.

## 4.2 Apresentação dos dados

Após o levantamento de todas as informações adquiridas foi possível detectar recursas, dificuldades e barreiras que delimitam o ensino-aprendizagem no que diz respeito à introdução do novo em consonância com a forma tradicional de ensino. Dessa forma iremos apresentar os dados referentes à pesquisa feita com os alunos envolvidos nesse processo.

## 4.3 Dificuldades do professor facilitador

Nessa perspectiva de aprendizagem por intermédio de um simples balbuciar do aluno em aula pode influenciar negativamente no processo de aplicação dos fractais e na própria Matemática em si, inserindo quebras na conciliação desse aprendizado entre os alunos através de assuntos desvinculados do contexto apresentado.

As salas de aula são excessivamente miscigenadas, com desenvolvimento cognitivos diferenciados tendo alunos que apresentam uma maior aceitação pelo o que está sendo proposto, enquanto outros são totalmente indiferentes, prejudicando a si mesmo como também aos colegas de sala e o bom desenrolar da proposta programática. Alunos inquietos, cheios de hormônios e energia, mas que infelizmente é direcionada para assuntos alheios a componentes educacionais, novelas, filmes, violência, sexo são os diálogos frequentes entre esses jovens que não veem o estudo como ponto de partida inicial para uma boa formação pessoal e profissional. Até mesmo bullying é praticado em sala de aula desvinculando o professor da sua abordagem pedagógica inicialmente programada para um direcionamento de aula voltada ao respeito mútuo e às diferenças entre as pessoas.

O desinteresse é um fator contundente a boa assimilação dos conteúdos ministrados, seja ele no campo dos fractais ou numa simples memorização de tabuada instrumento tão antigo, mas que ainda tem tolerância no aprendizado matemático.

O aluno em muitos casos se apresenta sem “base”, sem os conhecimentos mínimos desejados e necessários para adentrar e acompanhar com eficiência um novo conteúdo exposto. Há grande dificuldade para motivar os alunos pelo gosto à Matemática, pois muitos já trazem consigo essa antipatia desde cedo que surge em alguns casos de seu próprio lar. Herança dos pais? A escola também gera essa antipatia aos conteúdos matemáticos?

O linguajar com o qual é apresentado o conteúdo também é um fator que interfere na boa aprendizagem do discente, percebe-se nos sistemas de monitoria que alunos que têm muitas dificuldades na sala de aula sentem-se mais livres para perguntar e fazer indagações sobre a disciplina exposta pelo colega aluno-monitor do que com o professor na sala de aula do cotidiano.

#### 4.4 Dificuldades apresentadas pelos alunos na aplicação dos fractais em consonância aos assuntos programáticos da educação básica

No início dessa pesquisa nos deparamos com tantas divergências minuciosas dentre os alunos envolvidos na pesquisa em contra partida aos objetivos traçados para a construção desse trabalho. Várias são as indagações dos alunos ao buscarem relacionar os fractais em seu contexto diário de aprendizagem. Um questionamento muito frequente entre muitos alunos sempre surgia: em que nós vamos usar isso em nossa vida. Sentimentos de incapacidade, nervosismo, apreensão e muitas vezes desespero por não encontrar uma solução adequada para a situação proposta. O medo de que o resultado se apresentasse errado em alguns alunos ocasionava segundo relato deles, dores de cabeça por insegurança e ineficiência para resolver as atividades propostas. A fuga dos elementos era perceptível e certo ar de culpa transparecia por buscar um ponto referencial que não fosse aquele direcionado à atividade proposta. A irresponsabilidade também surgia em virtude da sensação de não saber “nada”, o medo de errar para alguns alunos estava presente e nesses casos os alunos se viam estáticos. Porém surgem alunos que transmitem tranquilidade, alegria, ar de superação perante a atividade proposta, o desafio pelo proposto e satisfação pelo encontro do objetivo alcançado.

Como conciliar os fractais de forma tal a termos a atividade proposta resolvida, interpretando o que está sendo estimulado pela mesma? Era uma pergunta frequente. A incerteza de uma construção fractal ou outra ser mais viável ou não, descobrir a recorrência correta o raciocínio adequado se apresentava como uma nova barreira buscando adequar a inferência às informações descritas na atividade. A lembrança de um conteúdo anteriormente visto é repensado para que de alguma forma possa auxiliar e estimular o

desenrolar da atividade proposta.

Alguns alunos afirmam ainda que não têm interesse nas aulas de Matemática ou que não morrem de amores pela mesma nem sabem a onde vão aplicá-la. Por que então aprender uma nova Matemática em paralelo com a usual que já não gostamos?

Outros são de certa forma “realistas”, pois afirmam:

- Eu não prestei atenção à aula durante a explicação do professor;
- Eu estava fazendo bagunça;
- Eu conversava com meus amigos;
- Eu fico na aula jogando papel;
- Eu estava mexendo no celular. (Hoje uma das principais fontes de desatenção em relação ao aprendizado)

Infelizmente ainda temos alunos com essa falsa realidade, cujas dificuldades para aceitar o novo são enormes ou até mesmo na Matemática usual é grande essa recusa, em alguns partem de uma incumbida indisciplinaridade.

## 4.5 Relatos de aprendizados: A influência dos fractais no ensino.

As construções, opiniões e cálculos apresentados em imagens neste capítulo foram desenvolvidos pelos alunos demonstrando o conhecimento adquirido em consonância com os fractais e sua influência na aprendizagem.

Algumas dessas construções representadas em imagens trazem em destaque contagens, sequências, perímetros e áreas dos fractais em contexto com assuntos da educação básica desenvolvidas pelos alunos ao longo do processo da aplicação desse aprendizado.

### Aluno A - St

Os fractais são objetos em que cada parte é semelhante ao objeto como um todo. Eles são considerados figuras que não fazem parte da Geometria Euclidiana.

Acreditam que essas figuras despertam a curiosidade e o intelecto do aluno. Com vários passos a serem tomados e a necessidade do raciocínio lógico para concluir e dar formas a imagens infinitas, transforma a aprendizagem do estudante em sala de aula ainda mais satisfatória.

Os fractais estão presentes na natureza e na nossa vida cotidiana, assim eles merecem ter sim uma parte do nosso estudo escolar. Acredito que seja satisfatório o ensino sobre esse assunto, pois uma carga maior de conhecimento beneficia cada vez mais o aluno.

### **Aluno B - Nik**

Fractais são figuras geométricas “muito loucas”, produzidas por meio de equações matemáticas que podem ser feitos a mão ou por programas de computador. O mais interessante é que eles contêm, dentro de si, cópias menores deles mesmos. Essas cópias, por sua vez, contêm cópias ainda menores e assim sucessivamente.

A curva de Koch é um bom exemplo de fractal, para criá-la é simples e repetitivo: adicionar triângulos ao perímetro de um triângulo inicial (que se dirige a um floco de neve).

Quando comecei a estudar sobre fractais, percebi que eles estão ao nosso redor. Na natureza existem vários exemplos de imagens que se aproximam muito de fractais, como as folhas de uma samambaia ou de um brócolis.

Nessa etapa o aluno já desenvolveu a ideia de contagem, perímetro, sequência e área, embora não desenvolva adequadamente a construção desses fractais para obter de uma forma mais estética sua formulação generalizada. Observar as figuras 4.1 e 6.1.

### **Aluno C**

A partir desse estudo, vimos nos fractais uma alternativa para trabalharmos com números de uma forma mais complexa, no entanto, percebemos que este tema é muito mais amplo do que pensávamos inicialmente, podem ser explorados vários conceitos através dessa geometria. Além disso, a Geometria dos fractais é a Matemática do futuro, e assim ela é mais interessante para alguns jovens. Na atualidade, atrair os alunos para a sala de aula não é uma tarefa fácil.

### Aluno D - K1

Estudar esse ramo tão importante da Matemática pode trazer alguns benefícios, pois, sua compreensão é importante para que se tenha um bom desenvolvimento na matéria, seja na escola ou na universidade, ajudando-nos a entender melhor os objetos e cenários do nosso dia a dia, com uma ampliação da nossa consciência, a termos uma visão mais microscópica de tudo ou até mesmo para que tenhamos muitas análises matemáticas de coisas que podem ser bastante úteis, como as previsões meteorológicas, por exemplo.

Considero os fractais uma arte, assim como as outras formas de expressão, pois se destacam mais ainda por serem verdadeiros espetáculos de autossimilaridade e que resultam de fatores diferentes, como das relações de recorrência em cada ponto do espaço ou principalmente por sistemas de funções.

Estudar fractais também é importante para conhecermos alguns grandes nomes da Matemática que tiveram os mais conhecidos fractais patenteados com seus nomes. O triângulo de Sierpinski por exemplo, que foi descrito pela primeira vez pelo matemático polonês Waclaw Sierpinski. Assim cada fractal possui uma história diferente. Observar as figuras 6.2; 6.3; 6.4 e 6.5.

### Aluno E

A influência é muito boa, os fractais fazem os alunos aprenderem muitas coisas, tipo como usá-los, e os desenhos são muito legais, mas um pouco complicado para fazer.

### Aluno F

Apesar de todas as coisas, considero que os fractais não é algo tão importante a ser estudado, não há utilidade no ensino nas escolas, mas podendo ser importante dependendo da carreira a ser seguida. Observar a figura 4.7.

### Aluno G

Em minha opinião, é essencial a aprendizagem dessas figuras da Geometria não euclidiana, pois nos mostra como elas estão presentes de várias formas no nosso cotidiano. Sua utilização contribui para o desenvolvimento da Matemática e da humanidade. Além

disso, estudar sobre fractais na escola estimula nossa curiosidade e nos faz ter interesse em saber como eles estão presentes na nossa vida e de forma tão fascinante.

## **Aluno H**

O ensino da Geometria dos fractais nas escolas é importante, pois conduz o aluno a refletir ao observar a estética presente nessas figuras tais como o floco de neve e a curva de Koch.

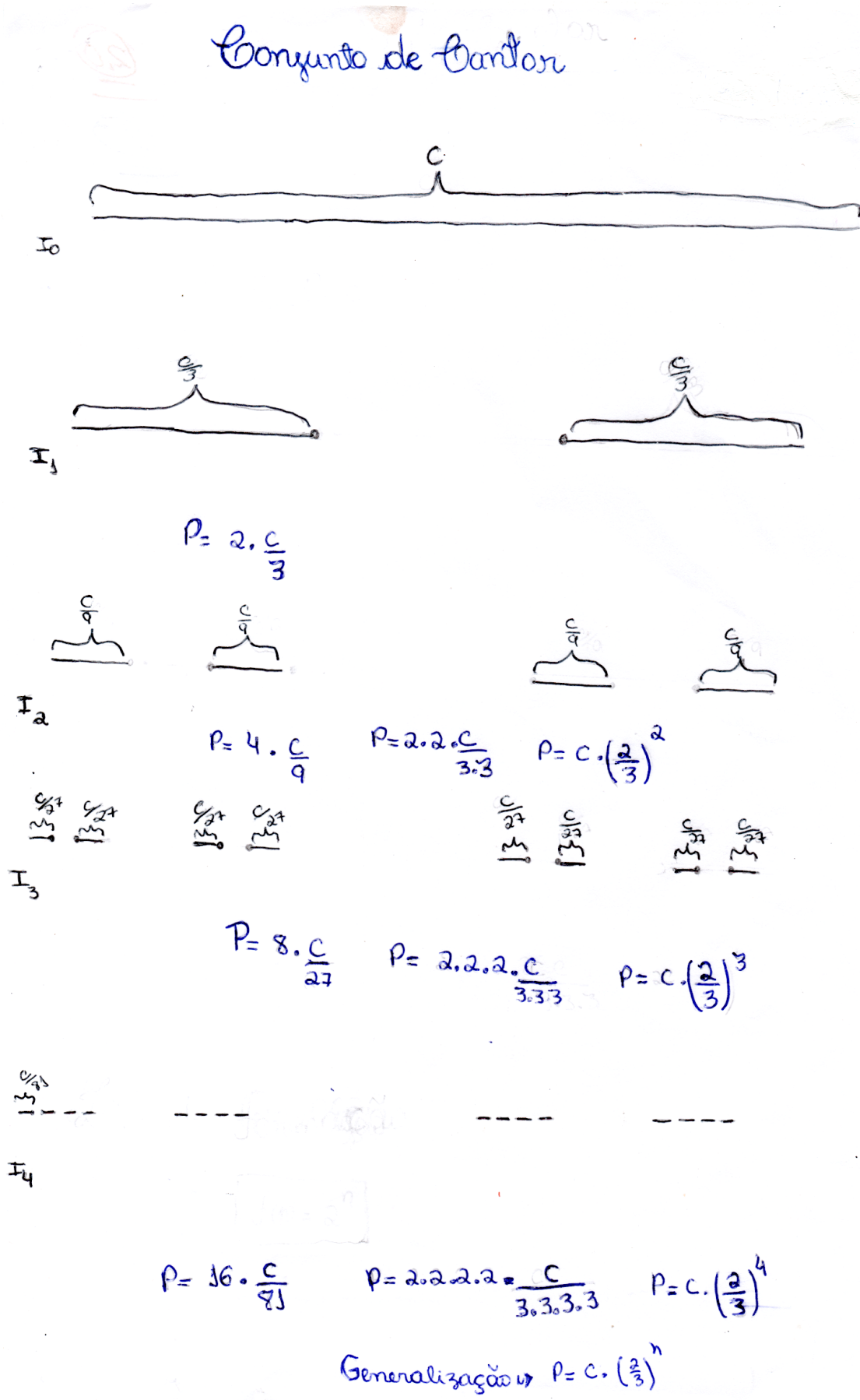
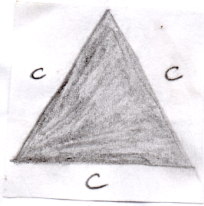


Figura 4.1: Construção 1 - Aluno B



Construção do triângulo de Sierpinski

figura 1

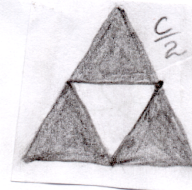


$$P = 3c$$

$$A = A$$

$I_0$

figura 2

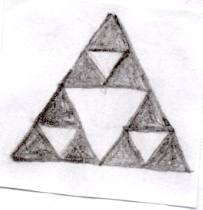


$$P = 3 \cdot \left(\frac{c}{2}\right)$$

$$S = A \cdot \left(\frac{3}{4}\right)$$

$I_1$

figura 3

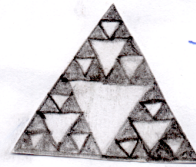


$$P = 9 \cdot \left(\frac{c}{2}\right)$$

$$S = A \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

$I_2$

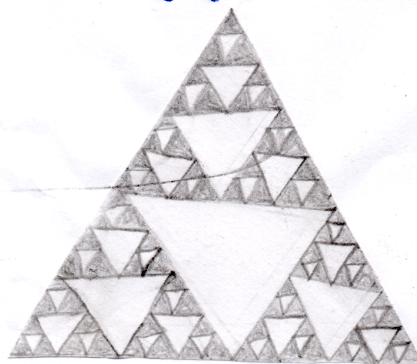
figura 4



$$P = 27 \cdot \left(\frac{c}{2}\right)^3$$

$$S = A \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3$$

figura 5



$$P = 81 \cdot \left(\frac{c}{2}\right)^4$$

$$S = A \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^4$$

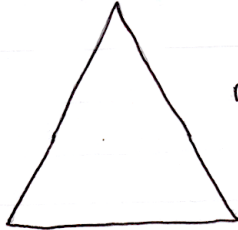
Generalização

$$P = 3 \cdot \left(\frac{c}{2}\right)^n \quad S = A \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

Figura 4.2: Construção 2 - Aluno B

01 - Construção do floco de neve de Koch.

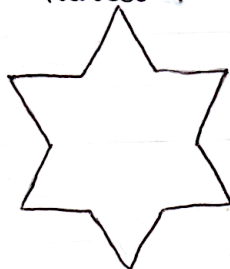
Nível 0



Nº de Segmentos: 3

$$P = 3 \cdot \frac{C}{3}$$

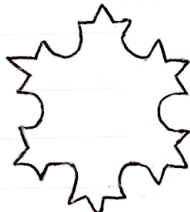
Nível 1



Nº de Segmentos: 12  $P = 3 \cdot 4 \cdot \frac{C}{3}$

$$P = 3 \cdot C \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^1$$

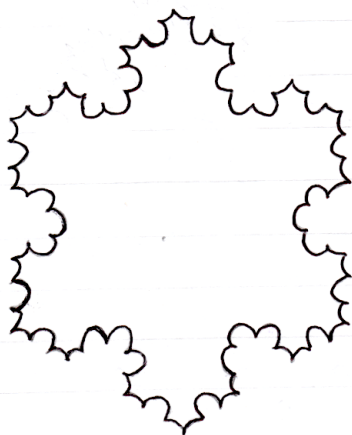
Nível 2



Nº de Segmentos: 48  $P = 3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{C}{3^2}$

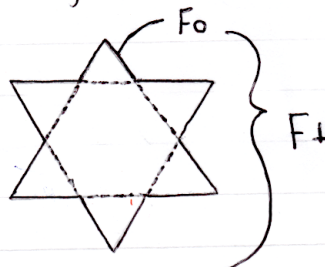
$$P = 3 \cdot C \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

Nível 3



Nº de segmentos: 192  $P = 3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{C}{3^3}$

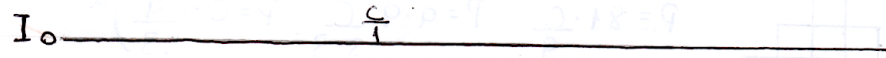
$$P = 3 \cdot C \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3$$





$$P = 3 \cdot C \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n$$


Figura 4.3: Construção 3 - Aluno D

02 - Construção do Conjunto de Cantor.

$I_0$    
 $N^\circ$  de Segmentos: 1  $P = \frac{C}{1}$

$I_1$    
 $N^\circ$  de Segmentos: 2  $P = \frac{2 \cdot C}{3}$

$I_2$    
 $N^\circ$  de Segmentos: 4  $P = \frac{2 \cdot 2 \cdot C}{3 \cdot 3}$   $P = \frac{2^2 \cdot C}{3^2}$   $P = C \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2$

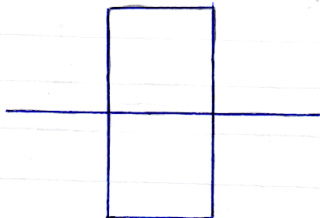
$I_3$    
 $N^\circ$  de Segmentos: 8  $P = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot C}{3 \cdot 3 \cdot 3}$   $P = \frac{2^3 \cdot C}{3^3}$   $P = C \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3$

$f(n) = 2^n$   
 $S_g = 2^n \cdot \frac{C}{3^n}$   $P = C \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n$

03 - Curva de Peano

Iteração 0  $N^\circ$  de Segmentos: 1  $P = \frac{C}{1}$

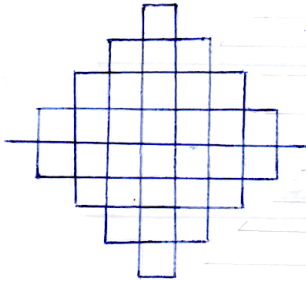
Iteração 1



$N^\circ$  de Segmentos: 9  $P = \frac{9 \cdot C}{3}$   $P = \frac{9^1 \cdot C}{3^1}$   $P = C \cdot \left(\frac{9}{3}\right)^1$   
 ou  $P = 3C$

Figura 4.4: Construção 4 - Aluno D

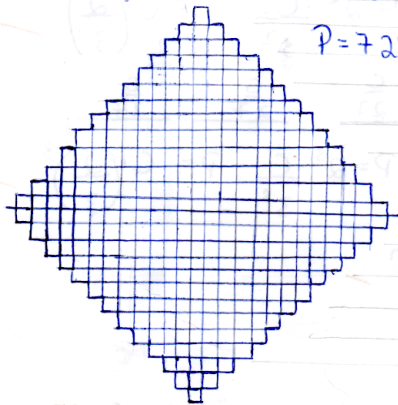
Iteração 2



Nº de Segmentos: 81

$$P = 81 \cdot \frac{C}{9} \quad P = 9 \cdot 9 \cdot \frac{C}{3 \cdot 3} \quad P = C \cdot \left(\frac{9}{3}\right)^2$$

Iteração 3



Nº de Segmentos: 729

$$P = 729 \cdot \frac{C}{27} \quad P = 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot \frac{C}{3 \cdot 3 \cdot 3} \quad P = 9^3 \cdot \frac{C}{3^3} \quad P = C \cdot \left(\frac{9}{3}\right)^3$$

In: Nº de Segmentos =  $9^n$

$$P = C \cdot \left(\frac{9}{3}\right)^n \quad \text{ou} \quad P = 3^n \cdot C$$

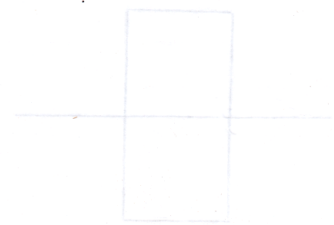
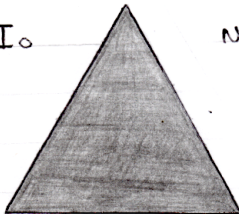
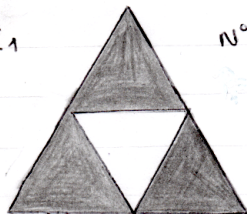
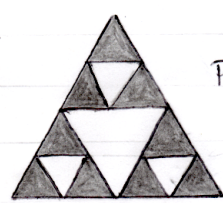


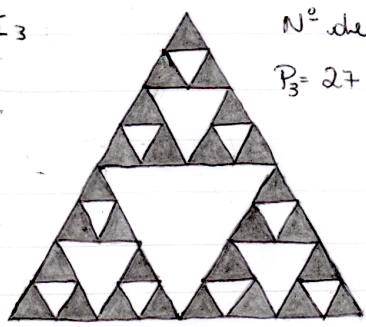
Figura 4.5: Construção 5 - Aluno D

04- O triângulo de Sierpinski

$I_0$    $N^\circ$  de triângulos:  $1 = 3^0$   $P_0 = 3C$   $S_0 = A$

$I_1$    $N^\circ$  de triângulos:  $3 = 3^1$   $P_1 = \frac{3 \cdot C}{2}$   $S_1 = \frac{3}{4} \cdot A$

$I_2$    $N^\circ$  de triângulos:  $9 = 3^2$   
 $P_2 = \frac{9 \cdot C}{4}$   $P_2 = \frac{3 \cdot 3 \cdot C}{2 \cdot 2}$   $P_2 = \frac{3^2 \cdot C}{2^2}$   $P_2 = C \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2$   
 $S_2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot A$

$I_3$    $N^\circ$  de triângulos:  $27 = 3^3$   
 $P_3 = \frac{27 \cdot C}{8}$   $P_3 = \frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot C}{2 \cdot 2 \cdot 2}$   $P_3 = \frac{3^3 \cdot C}{2^3}$   $P_3 = C \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3$   
 $S_3 = \left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot A$

\* Fórmula generalizada do Perímetro:

$$P_n = \frac{3^n \cdot C}{2^n} \quad P_n = C \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

\* Fórmula generalizada da Área:

$$S_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot A$$

Figura 4.6: Construção 6 - Aluno D

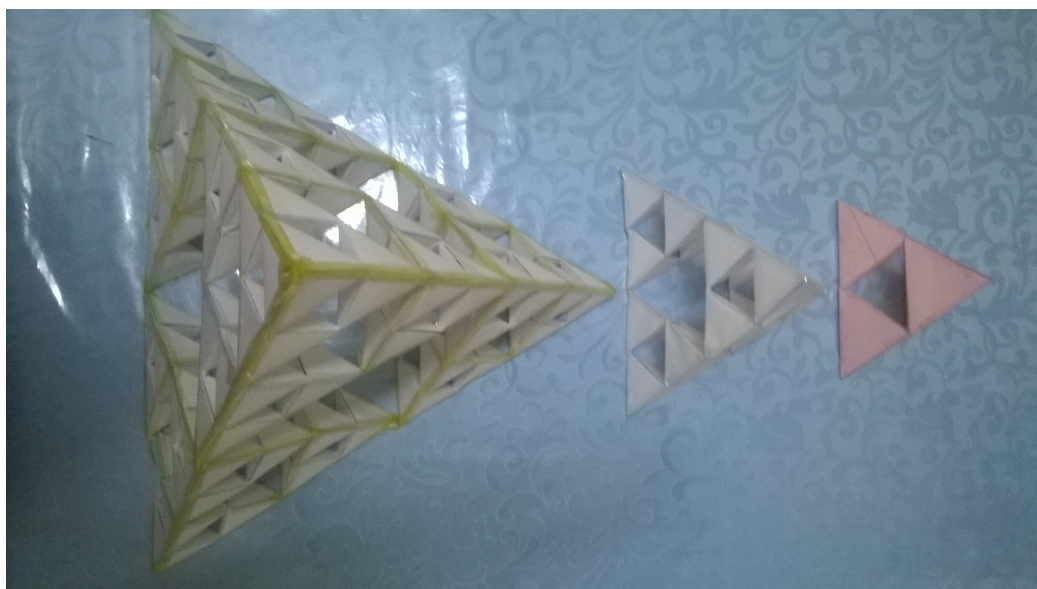


Figura 4.7: Construção 7 - Tetraedro de Sierpinski - Aluno F

# Capítulo 5

## Fractais e suas aplicações em outras áreas do conhecimento

Ao contrário do que se pensava no passado, sistemas simples nem sempre produzem comportamentos igualmente simples. Fruto desta nova realidade científica, a teoria dos fractais estende suas ramificações nos mais diversos campos do conhecimento científico.

### 5.1 Medicina e Biologia

Várias patologias cardíacas nada mais são que a falta de regularidade nas batidas do coração. Taquicardia, batidas ectópicas, ritmos de Wenckebach, várias são as irregularidades, entre as quais a mais preocupante é a fibrilação. Este é um caso interessante: geralmente cada componente individual do coração cumpre sua função normalmente, porém, o coração como um todo não apresenta a coordenação periódica contração-distensão. O órgão se contorce freneticamente e sangue não é bombeado. Pesquisadores têm estudado a dinâmica do coração, bem como condições de suspensão e indução da fibrilação. Isto tem permitido a criação de equipamentos desfibriladores mais eficientes.

O câncer ainda é uma moléstia a ser vencida. Além de novas terapias, os cientistas estudam novas formas de diagnóstico para que a identificação de tumores seja precisa e cada vez mais prematura. Bem, uma das diferenças entre células sadias e doentes está nos diferentes padrões de crescimento de cada tipo. O exame destes padrões, utilizando recursos de geometria fractal, pode ser a chave para a criação de um sistema de detecção

do câncer por computador.

O grupo de Pesquisa em Visão Cibernética do Instituto de Física de São Carlos (IFSC), da Universidade de São Paulo (USP), estuda as propriedades e as aplicações dos fractais. Este estudo tem permitido aos cientistas a caracterização da complexidade das células nervosas e neurônios. O grupo também aplica os conceitos de dimensão fractal no estudo de partículas de aerossol (solução na qual partículas sólidas ou líquidas estão dispersas em um gás). “A complexidade de uma partícula de um aerossol determina suas características aerodinâmicas”.

Um aerossol constituído por partículas mais lisas apresentará menor viscosidade para escoamento dentro de tubulações. Já um aerossol composto por partículas mais rugosas apresentará fluxo mais errático, permitindo maior possibilidade de choque com as paredes nas quais é injetado, por exemplo, é interessante que um aerossol usado para transporte de medicamentos via inalação apresente fluxo bastante irregular, aumentando assim a sua efetividade da assimilação, através de choques, pelas paredes dos alvéolos pulmonares. Assim, fica clara a importância de caracterizarmos de modo objetivo e efetivo a rugosidade dessas partículas, o que pode naturalmente ser feito utilizando-se a dimensão fractal.

Na Biologia, a equação não linear  $x_{n+1} = k \cdot x_n (1 - x_n)$  é utilizada amplamente na descrição populacional de vários tipos de animais em diferentes habitats.

## 5.2 Artes gráficas

Os fractais se apresentam em forma de figuras e o inverso também é verdadeiro, ou seja, as imagens podem ser convertidas em fractais. Você deve se lembrar de que os fractais são obtidos a partir de poucas instruções simples. Aplicando este princípio, podem-se comprimir grandes imagens e mesmo vídeos (que são sequências de imagens), numa razão de até 10000 para um.

A criação de texturas é outra aplicação deste princípio. As texturas são utilizadas nos softwares de edição de imagens, possibilitando a criação de paisagens que beiram a realidade. A figura da copa de uma árvore, por exemplo, não será superfície de única cor verde, mas uma estrutura constituída de um conjunto aleatório de milhares de folhas, imitando quase que fotograficamente uma árvore real. Aplicações disto são os efeitos



especiais utilizados no cinema e a fabricação de desenhos animados cada vez mais “reais”.

### 5.3 Geografia

A descrição e caracterização de falhas sísmicas e, por conseguinte, terremotos são obtidos através do estudo de sua estrutura fractal. Além de terremotos, outros fenômenos geológicos podem ser estudados como, por exemplo, a dinâmica dos vulcões.

### 5.4 Economia

Na economia, as análises de comportamento globais ajudam a entender os comportamentos locais e vice-versa. O estudo destas análises permite criar estratégias comerciais de médios e longos prazos.

### 5.5 Arte Fractal

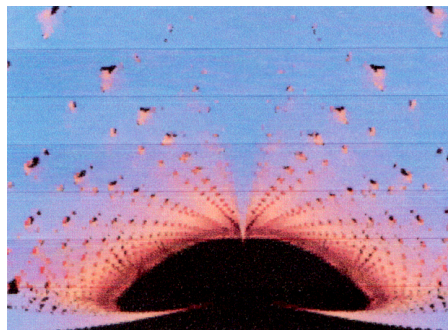


Figura 5.1: Fractal gerado por computador

Arte fractal é a criada utilizando-se funções matemáticas chamadas fractais e transformando os resultados dos cálculos em imagens, animações, música ou outro tipo de mídia. Imagens fractais são os gráficos resultantes dos cálculos, a animação são sequências desses gráficos. Música fractal transforma os resultados do cálculo em sons. Geralmente, mas não exclusivamente, utilizam-se computadores para processá-los, devido à complexidade da matemática envolvida.

### 5.5.1 Classificação

Existem quatro categorias relevantes de arte fractal, divisão baseada no tipo de matemática envolvida no processo, onde o nome normalmente aparece associado ao do matemático que o desenvolveu.



Figura 5.2: Experimento com fractal de Mandelbrot

- Aquela onde cada ponto do gráfico pode ser determinado pela aplicação iterativa de uma função simples (Exemplos são o conjunto de Mandelbrot, o fractal de Lyapunov e o fractal do navio queimado);
- Aquela onde existe uma regra de substituição geométrica (Exemplos incluem a poeira de Cantor, o triângulo de Sierpinski, a esponja de Menger);
- Aquela criada com sistema fractais iterativos (Exemplo, as chamadas fractais);
- Aquela gerada por processos com razão aleatória, em vez de processos deterministas (Como as paisagens fractais).

Fractal dos quatro tipos tem sido utilizado como base de arte e animação digital. Começando com detalhes bidimensionais, os fractais encontram aplicações artísticas variadas, como gerar texturas, simulação de vegetação e confecção de paisagens. Podem então evoluir para representações tridimensionais complexas. Na música, sons baseados em fractais são surpreendentemente realistas e parecem mais capazes de produzir sons parecidos com os naturais que outros processos artificiais.

### 5.5.2 Paletas de curva

Sendo um tipo de arte que usa basicamente o computador como suporte primário, não é de admirar que a internet seja o maior repositório deste tipo de arte. São

particularmente interessantes também as relações entre fractais e a chamada sequência de Fibonacci e a proporção áurea (...), tão rara aos artistas de Antiguidade clássica e do Renascimento. Com fractais aplicados ao conhecimento do funcionamento do universo, calculados com potentes computadores, podemos não só simular o nascimento de mundos e o crescimento celular do DNA, mas pode o artista usar sua sensibilidade para selecionar nessa nova paleta eletrônica, as imagens ou sons que deseja para representar sua arte.

### **5.5.3 Metafísica fractal**

Metafísica fractal é uma forma de compreender que existe um ritmo e uma fórmula para o caos, que há uma ordem nele.

Se você tem um padrão de ondas celebrais que é rítmica e outra desconexa, qual você prefere? Presumo que a primeira, à primeira vista. Mas se pensarmos direito, a outra, a caótica, seria a correta. Porque a mente e a memória são fractais por excelência, elas não seguem uma linha reta, uma aparente ordem, uma sequência. Por exemplo, quando você pensa na primeira vez que teve um cigarro aceso em seus dedos, que foi num jogo de futebol que assistiu aí você se lembra de um dia chuvoso, depois num acidente que você presenciou quando tinha 13 anos... e por aí vai, de associação em associação, de forma lógica ou ao acaso. A coisa não funciona digamos, sob controle, cronologicamente, ordenadamente. É aos saltos e, para isto, para a nossa mente trabalhar assim, é preciso que exista o Caos e, simultaneamente, alguma espécie de ordem. O coração e os pulmões são rítmicos, mas a mente é caótica.

### **5.5.4 Música fractal**

A música fractal, tal como os fractais, é o resultado de um processo repetitivo no qual um algoritmo é aplicado múltiplas vezes para elaborar a sua anterior produção. Numa perspectiva mais ampla, todas as formas musicais, tanto a nível micro como a nível macro podem ser elaborados por este processo. Nos dias de hoje, os fractais têm vindo a fornecer resultados extremamente interessantes, por isso cada vez mais se pesquisa em busca de novas músicas, De fato, a música fractal tem vindo a ganhar entusiasmo e apreciadores. Uma ligação entre as artes musicais e a natureza foi finalmente descoberta em 1975 quando Voss e Clark descobriram que uma grande variedade de música de diferentes períodos históricos e culturais, segue a mesma regra: “ $1/f$ ” ( $f$  = frequência); tal como em muitos

fenômenos naturais. Isto não só promove uma ligação entre as artes musicais e a natureza como também tem uma grande importância no estabelecimento de princípios, pelos quais se vai reger a beleza e o bom gosto. Este fenômeno “ $1/f$ ” existe algures entre aquilo que é rigorosamente previsível e os fenômenos aleatórios. A maioria dos músicos concordaria até que a melhor música não é demasiado previsível, nem demasiado imprevisível.

Assim, uma aplicação visível de que a música, natureza e Matemática são três áreas extremamente interligadas, é o fato dos fractais poderem ser convertidos em música, apesar de este ser um processo muito longo e complicado. Apesar de poder parecer muito estranho, desde há muito tempo que a música e a Matemática se encontram associadas. Hoje em dia, os modernos computadores perpetuam essa ligação.

A primeira área em que a Matemática revela a sua influência sobre a música é na escrita das partituras. Depois, o andamento, o ritmo, a duração das notas, tudo isso se relaciona com estudos matemáticos. Também existem instrumentos que têm formas e estruturas relacionadas com vários conceitos matemáticos. Pode ainda dizer-se que a música está relacionada com razões, curvas exponenciais, funções periódicas e ciências da computação.

Deste modo, pode-se concluir, que hoje em dia todos os músicos e matemáticos continuam a desempenhar papéis igualmente importantes na produção e na reprodução musical.

Existem três observações pertinentes que relacionam a música com os fractais:

1. Uma das características dos fractais que foram encontrados com um relativo interesse musical é autossimilaridade.
2. As técnicas analíticas da música clássica de Henrich Schenker refletem as partes de uma forma musical como estruturas autossimilantes.
3. Certos procedimentos composicionais que constroem o novo material musical através de transformações sistemáticas de certos materiais podem resultar em estruturas musicais claramente autossimilantes.

Existem vários métodos para converter imagens em música. No entanto, este processo só pode ser feito com recurso a algum do mais avançado software e de tecnologia de informática.

De uma forma resumida, pode dizer-se que um dos principais fractais e também aquele que é mais utilizado na criação de música é o conjunto de Mandelbrot.

# Capítulo 6

## Considerações finais

Ao término deste trabalho não esperávamos encontrar tantas divergências, devido principalmente a indisponibilidade das aulas correntes serem cedidas para aplicação deste trabalho, onde as mesmas foram ministradas aos sábados, dificultando o processo de consolidar fractais em contexto com os conteúdos da educação básica. Alunos em muitas ocasiões apresentavam-se apáticos, receosos a esta forma de aprendizagem. Sentimentos de incerteza e medos surgiam nos alunos ao se depararem com algo tão extraordinário mais devida complexo. Várias dificuldades ao longo desse trabalho foram detectadas e registradas de forma que posteriormente sejam utilizadas para uma melhor apresentação dos fractais num aprendizado matemático mais contextualizado ao cotidiano do aluno. Devemos considerar de grande importância as aplicações matemáticas em seu contexto científico, mas não podemos deixar de lado o conhecimento adquirido pelo aluno no seu dia a dia. Fazer vir à tona esses conhecimentos em paralelo com a Matemática usual e os fractais é aumentar a capacidade do ser discente em querer raciocinar, pensar e adquirir uma nova visão pelo simples fato de buscar o que para ele é desconhecido, extraordinário ou até mesmo “assustador”.

O desinteresse do aluno gera ainda um descaso do professor em relação à aprendizagem daquele aluno, e esse tipo de sentimento se torna recíproco ficando a Matemática marcada cada vez mais como difícil, o que deixa cada aluno mais desestimulado a aprendê-la, independentemente do conteúdo a ser explorando criando assim uma barreira à abertura e aplicação do novo. Esses sentimentos de adversidades entre professor e aluno deve assim ser analisado e repensado, direcionando a um novo comportamento de aprendizagem dentro e fora da sala de aula. Os fractais estão em nosso meio é preciso incentivar

---

os discentes a verem essas formas tão extraordinárias com uma visão mais perceptível do mundo e da Matemática que envolve a Geometria Fractal.

# Referências Bibliográficas

- [1] SILVA, Paulo Cunha e. - **O Lugar do Corpo: Elementos Para Uma Cartografia Fractal**. Epistemologia e Sociedade - Instituto Piaget, 1999.
- [2] BARBOSA, Ruy Madson. - **Descobrimo a Geometria Fractal para sala de aula**. 2.ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.
- [3] MANDELBROT, Benoît B. - **OBJETOS FRACTAIS**. 2.ed.Lisboa - Gradiva, 1998.
- [4] JANOS, Michel. - **Geometria Fractal**. 1.ed. Rio de Janeiro - Ciência Moderna Ltda, 1998.
- [5] RICIERI, Aginaldo Prandini. - **Fractais e caos**. 1.ed. São Paulo - Prandiano, 1991.
- [6] CARVALHO, Maria C. C. S; SILVA, Aristóteles A.; BOCCIA, Deise C. M. S.; RIBEIRO, Joaquim F. P.; BOGGIO, Sérgio A. - **Fractais uma breve introdução**. 1.ed.
- [7] SALLUN, M. E. - **Fractais no Ensino Médio**. São Paulo: Revista do Professor de Matemática v. 57, p. 1- 8. SBM. 2005.