



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ  
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA  
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA  
MESTRADO EM MATEMÁTICA

## Sistemas p-fuzzy

Rafaelber de Carvalho Souza Pereira Lima

Teresina - 2018

**Rafaelber de Carvalho Souza Pereira Lima**

**Dissertação de Mestrado:**

**Sistemas p-fuzzy**

Dissertação submetida à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:

Prof. Dr. Jefferson Cruz dos Santos Leite

**Teresina - 2018**

FICHA CATALOGRÁFICA  
Serviço de Processamento Técnico da Universidade Federal do Piauí  
Biblioteca Setorial do CCN

L732s Lima, Rafaelber de Carvalho Souza Pereira.  
Sistemas p-fuzzy / Rafaelber de Carvalho Souza Pereira  
Lima. – Teresina, 2018.  
50 f.: il. color.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Piauí,  
Centro de Ciências da Natureza, Pós-Graduação em  
Matemática, 2018.

Orientador: Prof. Dr. Jefferson Cruz dos Santos Leite

1. Análise. 2. Equações Diferenciais Parciais. 3. p-fuzzy  
Bidimensional. I. Título.

CDD 515.353

Bibliotecária : Caryne Maria da Silva Gomes / CRB3-1461



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ  
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

*Sistemas p-fuzzy*

RAFAELBER DE CARVALHO SOUZA PEREIRA LIMA

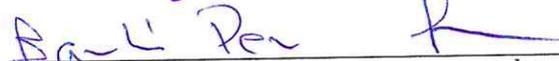
Esta Dissertação foi submetida como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de **Mestre em Matemática**, outorgado pela Universidade Federal do Piauí.

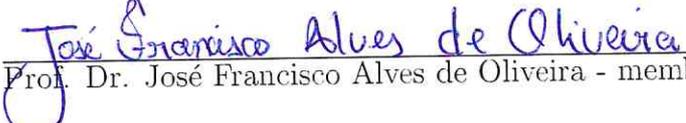
A citação de qualquer trecho deste trabalho é permitida, desde que seja feita em conformidade com as normas da ética científica.

Dissertação aprovada em 02 de Agosto de 2018.

**Banca Examinadora:**

  
Prof. Dr. Jefferson Cruz dos Santos Leite - Presidente

  
Prof. Dr. Barnabé Pessoa Lima - membro interno

  
Prof. Dr. José Francisco Alves de Oliveira - membro interno

*Aos meus avós Virgílio e Nelly.*

# Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus por sempre me guiar e me ajudar nos momentos difíceis.

Agradeço aos meus pais e a minha irmã que sempre me incentivaram na busca do conhecimento.

Agradeço as minhas Tias Fátima, Socorro e Raquel que ajudam não só a mim, mas toda minha família, em especial minha madrinha Socorro que sempre está comigo nos momentos difíceis.

Agradeço aos meus amigos do mestrado com quem tive um ótimo convívio.

Agradeço a meu orientador, professor Jefferson Cruz dos Santos Leite, que me acompanha desde a graduação, onde foi meu orientador em três projetos de iniciação científica.

Agradeço (a CAPES, ao CNPq, a FAPEPI) pelo apoio financeiro.

*“A matemática é o alfabeto com qual,  
Deus escreveu o universo”.*

Galileu Galilei.

# Resumo

Neste trabalho, estudamos condições de existência e unicidade do ponto de equilíbrio dos sistemas p-fuzzy unidimensional e bidimensional.

Inicialmente, estudamos os principais tópicos da Teoria dos Conjuntos Fuzzy, a fim de obter o suporte necessário para entender os sistemas p-fuzzy.

Posteriormente, demos a definição do sistema p-fuzzy unidimensional e estabelecemos condições para a existência e unicidade do ponto de equilíbrio de tais sistemas.

Para finalizar o trabalho, demos a definição do sistema p-fuzzy bidimensional e estendemos a teoria do sistema p-fuzzy unidimensional para o sistema p-fuzzy bidimensional.

**Palavras-Chave:** P-fuzzy, Zadeh, Estabilidade, Equilíbrio

# Abstract

In this work, we study conditions to existence and uniqueness of equilibrium point to one-dimensional and two-dimensional p-fuzzy systems.

Initially, we studied the main topics of Fuzzy Set Theory to obtain the necessary support to understand the p-fuzzy systems.

Subsequently, we gave the definition of the one-dimensional p-fuzzy system and established conditions for the existence and uniqueness of the equilibrium point of such systems.

Lastly, we have defined the two-dimensional p-fuzzy system and extended the one-dimensional p-fuzzy system theory to the two-dimensional p-fuzzy system.

**Keywords:** P-fuzzy, Zadeh, established, equilibrium

# Sumário

<b>Resumo</b>	<b>iv</b>
<b>Abstract</b>	<b>v</b>
<b>1 Noções Preliminares</b>	<b>2</b>
1.1 Subconjuntos fuzzy . . . . .	2
1.2 Operações com subconjuntos fuzzy . . . . .	3
1.3 O conceito de $\alpha$ -nível . . . . .	3
1.4 Números Fuzzy . . . . .	4
1.5 Lógica fuzzy . . . . .	5
1.5.1 Variáveis linguísticas . . . . .	5
1.5.2 Proposição fuzzy . . . . .	5
1.6 Sistemas baseados em regras fuzzy . . . . .	7
1.7 Sistemas p-fuzzy . . . . .	7
<b>2 Sistema p-fuzzy unidimensional</b>	<b>8</b>
2.1 Definições preliminares . . . . .	8
2.2 Defuzificação da saída do sistema fuzzy . . . . .	10
2.3 Preliminares matemáticos . . . . .	11
2.4 Existência de ponto de equilíbrio . . . . .	14
2.5 Determinação do ponto de equilíbrio - saída simétrica . . . . .	15
2.6 Unicidade do ponto de equilíbrio . . . . .	16
2.6.1 Caso 1: $g(t) > f(-t)$ . . . . .	17
2.6.2 Caso 2: $g(t) < f(-t)$ . . . . .	21
2.6.3 Consequências dos Teoremas 2.3 e 2.4 . . . . .	21

---

<b>3</b>	<b>Sistema p-fuzzy bidimensional</b>	<b>25</b>
3.1	Definições preliminares . . . . .	25
3.2	Defuzificação da saída do sistema baseado em regras fuzzy . . . . .	26
3.3	Existência do ponto de equilíbrio . . . . .	28
3.4	Identificação do ponto de equilíbrio . . . . .	30
3.5	Unicidade do ponto de equilíbrio . . . . .	33
3.5.1	Unicidade - saídas simétricas . . . . .	33
3.5.2	Unicidade - saídas não simétricas . . . . .	37
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>39</b>

# Introdução

A Teoria dos Conjuntos Fuzzy teve seu início em 1965 com a publicação do artigo *Fuzzy sets* de Lotfi Asker Zadeh [4]. Desde então, ela tem se desenvolvido e ganhado cada vez mais espaço.

O principal objetivo dessa teoria é dar uma formalização matemática a certos termos linguísticos subjetivos como “cerca de”, “mais ou menos”, “por volta de”, etc. Para obter essa formalização surgiu a definição de subconjunto fuzzy a qual será abordada na seção 1.1.

Mamdani e Assilian usaram a teoria dos conjuntos fuzzy para automatizar uma máquina a vapor [2]. Para isso, eles usaram um conjunto de regras associado a um processo de inferência que mais tarde seria chamado de Sistema Baseado em Regras Fuzzy o qual será abordado na seção 1.6. Tal trabalho foi uma das primeiras aplicações da Teoria dos Conjuntos Fuzzy e estimulou as pesquisas nesta área.

Os Sistemas p-fuzzy, objeto de estudo desta dissertação, são sistemas dinâmicos onde o processo iterativo é obtido por meio de um Sistema Baseado em Regras Fuzzy do tipo Mamdani. Em [3], Silva realiza um estudo analítico da estabilidade local dos sistemas dinâmicos p-fuzzy.

Nesta dissertação, estudamos condições de existência e unicidade do ponto de equilíbrio dos sistemas p-fuzzy unidimensional e bidimensional.

# Capítulo 1

## Noções Preliminares

Neste capítulo apresentaremos as definições e resultados básicos que serão utilizados posteriormente.

### 1.1 Subconjuntos fuzzy

A Teoria dos Conjuntos Fuzzy foi introduzida em 1965 pelo matemático Lotfi Asker Zadeh [4] com a principal intenção de dar um tratamento matemático a certos termos linguísticos subjetivos.

Para obter a formalização matemática de um conjunto fuzzy, Zadeh baseou-se no fato de que qualquer conjunto clássico pode ser caracterizado por uma função: sua *função característica*, cuja definição é dada a seguir.

**Definição 1.1.** *Seja  $U$  um conjunto e  $A$  um subconjunto de  $U$ . A função característica de  $A$  é dada por*

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A \\ 0, & \text{se } x \notin A \end{cases}.$$

Ampliando-se o contra-domínio da função característica de um conjunto foi que Zadeh obteve a definição de subconjunto fuzzy, a qual é dada a seguir.

**Definição 1.2.** *Seja  $U$  um conjunto. Um subconjunto fuzzy  $F$  de  $U$  é caracterizado por uma função*

$$\varphi_F : U \rightarrow [0, 1],$$

*pré-fixada, chamada função de pertinência do subconjunto fuzzy  $F$ .*

O valor  $\varphi_F(x) \in [0, 1]$  indica o grau de pertinência do elemento  $x \in U$  ao conjunto fuzzy  $F$ ;  $\varphi_F(x) = 0$  e  $\varphi_F(x) = 1$  indicam, respectivamente, a não pertinência e a pertinência completa de  $x$  ao conjunto fuzzy  $F$ .

O subconjunto de  $U$  definido por

$$\text{supp}F = \{x \in U : \varphi_F(x) > 0\}$$

é denominado suporte de  $F$ .

**Observação 1.1.** *Em nosso trabalho, usaremos indistintamente  $F$  ou  $\varphi_F$  para indicarmos a função de pertinência do subconjunto fuzzy  $F$ .*

## 1.2 Operações com subconjuntos fuzzy

Sejam  $A$  e  $B$  dois subconjuntos fuzzy de  $U$ , com funções de pertinência indicadas por  $\varphi_A$  e  $\varphi_B$ , respectivamente.

**Definição 1.3.** *A Intersecção entre  $A$  e  $B$  é o subconjunto fuzzy de  $U$  cuja função de pertinência é dada por:*

$$\varphi_{A \cap B}(x) = \min\{\varphi_A(x), \varphi_B(x)\}, \forall x \in U.$$

**Definição 1.4.** *A União entre  $A$  e  $B$  é o subconjunto fuzzy de  $U$  cuja função de pertinência é dada por:*

$$\varphi_{A \cup B}(x) = \max\{\varphi_A(x), \varphi_B(x)\}, \forall x \in U.$$

## 1.3 O conceito de $\alpha$ -nível

Um subconjunto fuzzy  $A$  de  $U$  é “formado” por elementos de  $U$  com uma certa hierarquia que é traduzida através da classificação por graus. Um elemento  $x$  de  $U$  está em uma classe se seu grau de pertinência é maior que um determinado valor limiar ou nível  $\alpha \in [0, 1]$  que define aquela classe. O conjunto de tais elementos é um  $\alpha$ -nível de  $A$ , denotado por  $[A]^\alpha$ .

**Definição 1.5.** *Sejam  $\alpha \in [0, 1]$  e  $A$  um subconjunto fuzzy de  $U$ . O  $\alpha$ -nível de  $A$  é o subconjunto de  $U$  definido por:*

- i)  $[A]^0 = \overline{\text{supp}A}$ , ( $\alpha = 0$ );
- ii)  $[A]^\alpha = \{x \in U : \varphi_A(x) \geq \alpha\}$ , se  $0 < \alpha \leq 1$ ;

**Definição 1.6.** Um subconjunto fuzzy é dito normal se todos os seus  $\alpha$ -níveis forem não vazios, ou seja, se  $[A]^\alpha \neq \emptyset$ .

## 1.4 Números Fuzzy

**Definição 1.7.** Um subconjunto fuzzy  $A$  é chamado de número fuzzy quando o conjunto universo, no qual  $\varphi_A$  está definida, é o conjunto dos números reais  $\mathbb{R}$  e satisfaz às condições:

- i)  $[A]^\alpha \neq \emptyset, \forall \alpha \in [0, 1]$ ;
- ii)  $[A]^\alpha$  é um intervalo fechado,  $\forall \alpha \in [0, 1]$ ;
- iii) O suporte de  $A$  é limitado.

Observamos que todo número real  $r$  é um número fuzzy particular cuja função de pertinência é sua função característica:

$$\chi_r(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x = r \\ 0, & \text{se } x \neq r \end{cases}.$$

A família dos números fuzzy será indicada por  $\mathcal{F}(\mathbb{R})$  e, de acordo com o observado acima, o conjunto dos números reais  $\mathbb{R}$  é um subconjunto de  $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ .

Os números fuzzy mais comuns são os triangulares e os trapezoidais.

**Definição 1.8.** Um número fuzzy  $A$  é dito triangular quando sua função de pertinência tem a forma:

$$A(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{se } a < x \leq b \\ \frac{x-c}{b-c}, & \text{se } b < x \leq c \\ 0, & \text{se } x > c \end{cases},$$

com  $a < b < c$ .

**Definição 1.9.** Um número fuzzy  $A$  é dito trapezoidal quando sua função de pertinência tem a forma:

$$A(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{se } a < x \leq b \\ 1, & \text{se } b < x \leq c \\ \frac{x-d}{c-d}, & \text{se } c < x \leq d \\ 0, & \text{se } x > d \end{cases},$$

com  $a < b < c < d$ .

## 1.5 Lógica fuzzy

### 1.5.1 Variáveis linguísticas

Variáveis linguísticas são variáveis cujos valores ao invés de números são palavras, chamadas de termos linguísticos. Cada termo linguístico corresponde a um conjunto fuzzy.

Formalmente, uma variável linguística é caracterizada pela quintupla  $(x, T(x), U, G, M)$ , onde:

- $U$  é o universo de discurso (domínio da variável linguística);
- $x$  é o nome da variável;
- $T$  é o conjunto dos termos linguísticos;
- $G$  é uma regra semântica para gerar os nomes dos valores de  $x$ ;
- $M$  é uma regra semântica para associar cada valor ao seu significado.

### 1.5.2 Proposição fuzzy

Uma proposição fuzzy é uma declaração do tipo “Se  $x$  é  $A$  e  $y$  é  $B$ , então  $z$  é  $C$  ou  $z$  é  $D$ ”. Para traduzir matematicamente uma proposição fuzzy é necessário traduzir os conectivos e e ou. Para isso usamos os operadores t-norma e t-conorma os quais indicamos por  $\wedge$  e  $\vee$ .

**Definição 1.10.** Dizemos que o operador binário  $\wedge : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  é uma t-norma se satisfaz:

- i) *Comutatividade:*  $x \wedge y = y \wedge x$ ;
- ii) *Associatividade:*  $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$ ;
- iii) *Monotonicidade:* Se  $x \leq y$  e  $w \leq z$  então  $x \wedge w \leq y \wedge z$ ;
- iv) *Condições de fronteira:*  $0 \wedge x = 0$  e  $1 \wedge x = x$ .

**Definição 1.11.** Dizemos que o operador binário  $\vee : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  é uma t-conorma se satisfaz:

- i) *Comutatividade:*  $x \vee y = y \vee x$ ;

ii) *Associatividade*:  $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ ;

iii) *Monotonicidade*: Se  $x \leq y$  e  $w \leq z$  então  $x \vee w \leq y \vee z$ ;

iv) *Condições de fronteira*:  $0 \vee x = x$  e  $1 \vee x = 1$ .

**Proposição 1.1.** *Se A, B e C são subconjuntos fuzzy, então os operadores max e min são associativos e comutativos, isto é:*

i)  $\min\{\max\{A, B\}, \max\{A, C\}\} = \max\{A, \min\{B, C\}\}$ ;

ii)  $\max\{\min\{A, B\}, \min\{A, C\}\} = \min\{A, \max\{B, C\}\}$ .

**Demonstração.** Para demonstração desta Proposição consultar [4].

**Proposição 1.2.** *Seja  $f(x, y) = \min\{C(y), D(x)\}$  e suponhamos que C seja derivável em  $y_0$  e D derivável em  $x_0$  então:*

i)  $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = C'(y_0)$ , se  $C(y_0) < D(x_0)$ ;

ii)  $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$ , se  $C(y_0) > D(x_0)$ ;

iii)  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = D'(x_0)$ , se  $C(y_0) > D(x_0)$ ;

iv)  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$ , se  $C(y_0) < D(x_0)$ .

**Demonstração.** Temos que,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\min\{C(y_0 + h), D(x_0)\} - \min\{C(y_0), D(x_0)\}}{h} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Se tivermos  $C(y_0) > D(x_0)$ , então  $C(y_0 + h) > D(x_0)$  para  $h$  suficiente próximo de 0 (pois a função C é contínua). Daí por (1.1) tem-se,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{D(x_0) - D(x_0)}{h} = 0$$

Se, por outro lado, tivermos  $C(y_0) < D(x_0)$  então por (1.1) tem-se,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{C(y_0 + h) - C(y_0)}{h} = C'(y_0)$$

Os itens iii) e iv) demonstram-se de modo análogo.

## 1.6 Sistemas baseados em regras fuzzy

Tais sistemas consistem basicamente de três estágios: um estágio de entrada - *fuzificador*, um estágio de processamento, composto por uma *base de regras fuzzy* e um *método de inferência* e um estágio de saída - *defuzificador*.

Supondo que  $\mathbb{R}^n$  é o universo de discurso, então dado  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  o fuzificador transforma  $\mathbf{x}_0$  em um conjunto fuzzy,  $\hat{\mathbf{x}}_0 \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ .

O estágio de processamento é o núcleo do controlador fuzzy. Cada regra da base de regras é uma sentença do tipo:

### Se “Condição” Então “Ação”

Normalmente estas sentenças são ligadas por conectivos: *E*, *OU* e *NÃO*. O método de inferência traduz estas regras matematicamente, por meio de t-norma e t-conorma, gerando para cada regra uma saída. A combinação destas saídas gera uma saída fuzzy do sistema,  $\hat{\mathbf{y}} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ .

O método de inferência mais utilizado é o *MAX-MIN*, onde adota-se a t-norma  $\wedge$  (mínimo) para modelar o conectivo *E* e a t-conorma  $\vee$  (máximo) para agregar as regras fuzzy da base de regras. Normalmente sistemas do tipo Mamdani usam o *MAX-MIN* como t-normas e t-conormas [1].

A defuzificação é um processo de escolha de um elemento  $\mathbf{y} \in \text{supp}(\hat{\mathbf{y}})$  tal que  $\mathbf{y}$  seja capaz de representar o conjunto fuzzy  $\hat{\mathbf{y}}$ . Existem vários métodos de defuzificação descritos na literatura, o mais utilizado é o *centro de gravidade* que será abordado na Seção 2.1.

## 1.7 Sistemas p-fuzzy

Um *sistema p-fuzzy* em  $\mathbb{R}^n$  é um sistema dinâmico discreto,

$$\mathbf{x}_{k+1} = F(\mathbf{x}_k)$$

onde a função  $F$  é dada por  $F(\mathbf{x}_k) = \mathbf{x}_k + \Delta(\mathbf{x}_k)$ , a condição inicial  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  é dada e a variação  $\Delta(\mathbf{x}_k) \in \mathbb{R}^n$  é obtida por meio de um sistema baseado em regras fuzzy. Em nosso estudo usamos o método de inferência de Mamdani, ou seja, trabalhamos com sistemas baseados em regras fuzzy do tipo Mamdani.

# Capítulo 2

## Sistema p-fuzzy unidimensional

Neste capítulo, vamos abordar os sistemas p-fuzzy unidimensionais. Inicialmente apresentaremos as definições e os resultados matemáticos que julgamos necessários para o bom entendimento deste capítulo. Em seguida apresentaremos teoremas que garantem a existência e dão condições para unicidade do ponto de equilíbrio de um sistema p-fuzzy.

### 2.1 Definições preliminares

**Definição 2.1.** *Dado um sistema p-fuzzy unidimensional,*

$$\begin{cases} x_{k+1} = F(x_{k+1}) \\ x_0 \text{ dado e } x_k \in \mathbb{R} \end{cases}, \quad (2.1)$$

$F(x_k) = x_k + \Delta(x_k)$ , dizemos que  $x^*$  é um ponto de equilíbrio de (2.1) se  $F(x^*) = x^* \Leftrightarrow \Delta(x^*) = 0$ .

**Definição 2.2.** *Seja  $\{A_i\}_{1 \leq i \leq k}$  uma família finita de subconjuntos fuzzy normais associados a uma variável linguística  $x$ . Dizemos que  $\{A_i\}_{1 \leq i \leq k}$  é uma família de subconjuntos fuzzy sucessivos se,*

- i)  $\text{supp}(A_i) \cap \text{supp}(A_{i+1}) \neq \emptyset$ , para cada  $1 \leq i < k$ ;
- ii)  $\bigcap_{j=i, i+2} \text{supp}(A_j)$  possui no máximo um elemento para cada  $1 \leq i < k - 1$ ;
- iii)  $\bigcup_{i=1, k} \text{supp}(A_i) = U$ , onde  $U$  é o domínio da variável linguística  $x$ ;
- iv) dados  $z_1 \in \text{supp}(A_i)$  e  $z_2 \in \text{supp}(A_{i+1})$ , se  $A_i(z_1) = 1$  e  $A_{i+1}(z_2) = 1$  tem-se  $z_1 < z_2$  para cada  $1 \leq i < k$ .

**Definição 2.3.** Consideremos o sistema p-fuzzy (2.1) e uma família de subconjuntos fuzzy sucessivos  $\{A_i\}_{1 \leq i \leq k}$ . Se para algum  $1 \leq i < k$ ,  $z_1, z_2 \in \text{supp}(A_i \cup A_{i+1})$ ,  $\Delta(z_1)$  e  $\Delta(z_2)$  possui sinais contrários, então o subconjunto dado por:  $\text{supp}(A^*), A^* = A_i \cap A_{i+1}$ , é denominado conjunto viável de equilíbrio do sistema p-fuzzy (2.1).

Um sistema p-fuzzy depende do tipo de sistema fuzzy associado a ele. Isto é, da base de regras, do método de inferência e do método de defuzificação utilizado. Na Definição 2.3, variações com sinais contrários significa que o sistema p-fuzzy está associado a um sistema fuzzy cuja a base de regras é do tipo:

$R_1$  : Se  $x$  é  $A_i$  Então  $\Delta(x)$  é  $C$ ;

$R_2$  : Se  $x$  é  $A_{i+1}$  Então  $\Delta(x)$  é  $D$ ;

onde  $\text{supp}(C) \subset \mathbb{R}^-$  e  $\text{supp}(D) \subset \mathbb{R}^+$  ou vice e versa.

**Definição 2.4.** Seja  $A$  uma região limitada pela função contínua  $y = f(x)$ , as retas  $x = a$  e  $x = b$  e pelo eixo das abscissas (Figura 2.1). O centro de gravidade ou centróide de  $A$  é o ponto  $(\bar{x}, \bar{y})$  onde,

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b x f(x) dx}{\int_a^b f(x) dx} \text{ e } \bar{y} = \frac{\int_a^b \frac{1}{2} [f(x)]^2 dx}{\int_a^b f(x) dx}.$$

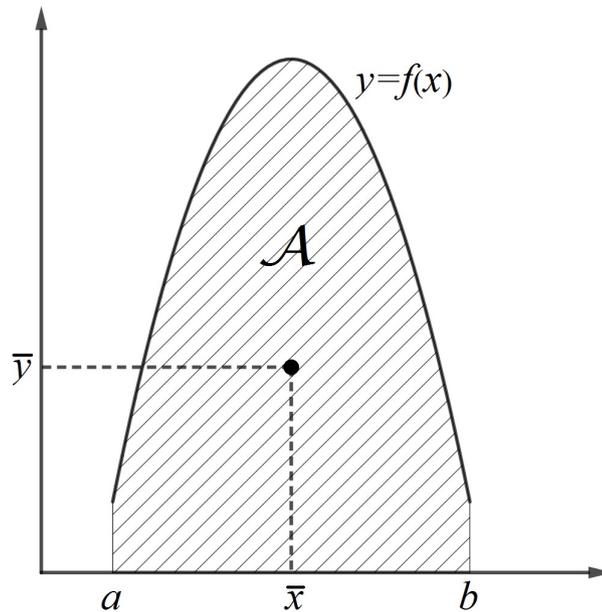


Figura 2.1: Centro de gravidade

Na teoria de sistemas fuzzy, usualmente centróide se refere apenas à abscissa do ponto  $(\bar{x}, \bar{y})$ . Portanto estaremos particularmente interessado em  $\bar{x}$ .

## 2.2 Defuzificação da saída do sistema fuzzy

Consideremos agora o sistema p-fuzzy associado ao sistema fuzzy de Mamdani (Figura 2.2) cujas regras são as seguintes:

$R_1$ : Se  $x$  é  $r$ , então  $\Delta(x)$  é  $g$

$R_2$ : Se  $x$  é  $s$ , então  $\Delta(x)$  é  $f$

Seja  $\text{supp}(A^*) = [c_1, c_2]$ ,  $A^* = A_i \cap A_{i+1}$ , um subconjunto viável de equilíbrio do sistema p-fuzzy. Indicaremos por  $r$  a função de pertinência de  $A_i$  e por  $s$  a função de pertinência de  $A_{i+1}$ ,

$$z_1 = \min\{x \in \text{supp}(A_i); r(x) = 1\} \text{ e } z_2 = \max\{x \in \text{supp}(A_{i+1}); s(x) = 1\},$$

e por  $f$  e  $g$  as respectivas funções de pertinências das saídas associadas a  $A_i$  e  $A_{i+1}$ .

Nestas condições, indicaremos este sistema p-fuzzy por  $(r, s) \rightarrow (g, f)$ , afim de explicitar qual sistema fuzzy está associado ao sistema p-fuzzy.

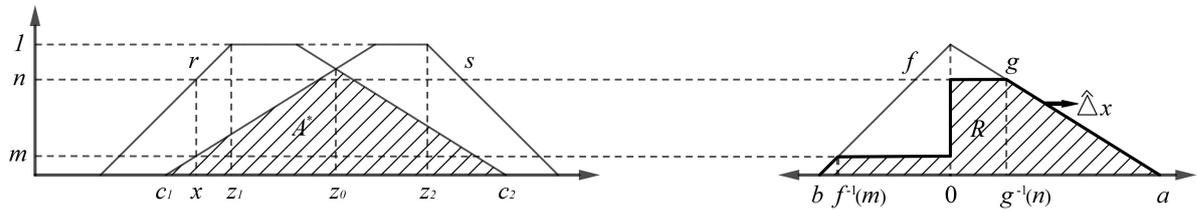


Figura 2.2: Sistema fuzzy de Mamdani

Dado  $x \in \text{supp}(A^*)$ ,  $\widehat{\Delta}(x)$  é a curva que limita a região  $R$ . Ao valor defuzificado de  $\widehat{\Delta}(x)$ , pelo método de defuzificação centro de gravidade (usando a Definição 2.4), indicaremos por  $\Delta(x)$  e definimos:

$$\Delta(x) = \frac{\int_b^{f^{-1}(m)} tf(t)dt + \int_{f^{-1}(m)}^0 mtdt + \int_0^{g^{-1}(n)} ntdt + \int_{g^{-1}(n)}^a tg(t)dt}{\int_0^n g^{-1}(t)dt - \int_0^m f^{-1}(t)dt} \quad (2.2)$$

onde  $(n, m) = (r(x), s(x))$ . A equação 2.2 ainda pode ser reescrita por:

$$\Delta(x) = \frac{h_1(n) + h_2(m)}{A(m, n)},$$

onde,

$$h_1(n) = \int_0^{g^{-1}(n)} ntdt + \int_{g^{-1}(n)}^a tg(t)dt \quad (2.3)$$

$$h_2(m) = \int_b^{f^{-1}(m)} tf(t)dt + \int_{f^{-1}(m)}^0 mtdt \quad (2.4)$$

$$A(m, n) = \int_0^n g^{-1}(t)dt - \int_0^m f^{-1}(t)dt \quad (2.5)$$

Observe que  $A(m, n)$  é a área da região  $R$ , onde optamos por escrevê-la em função das funções inversas de  $f$  e de  $g$ .

## 2.3 Preliminares matemáticos

**Lema 2.1.** *A função  $h_1$  (2.3) é crescente e sua imagem é dada por  $\text{Im}(h_1) = [0, \int_0^a tg(t)dt]$ .*

**Demonstração.** Como  $g$  é contínua em  $[0, a]$  (portanto limitada, o que implica que  $g^{-1}$  é limitada) então a função  $h_1$  é derivável, e,

$$\begin{aligned} h_1'(n) &= \left( \int_0^{g^{-1}(n)} ntdt \right)' + \left( \int_{g^{-1}(n)}^a tg(t)dt \right)' \\ &= \left( n \int_0^{g^{-1}(n)} tdt \right)' + \left( - \int_a^{g^{-1}(n)} tg(t)dt \right)' \\ &= \int_0^{g^{-1}(n)} tdt + n \left( \int_0^{g^{-1}(n)} tdt \right)' - \left( \int_a^{g^{-1}(n)} tg(t)dt \right)' \\ &= \int_0^{g^{-1}(n)} tdt + ng^{-1}(n)(g^{-1})'(n) - g^{-1}(n)g(g^{-1}(n))(g^{-1})'(n) \\ &= \int_0^{g^{-1}(n)} tdt \\ &= \frac{(g^{-1}(n))^2}{2} > 0. \end{aligned}$$

Portanto  $h_1$  é crescente. Agora,

$$h_1(0) = \int_0^{g^{-1}(0)} 0tdt + \int_{g^{-1}(0)}^a tg(t)dt = \int_a^a tg(t)dt = 0,$$

e,

$$h_1(1) = \int_0^{g^{-1}(1)} 1tdt + \int_{g^{-1}(1)}^a tg(t)dt = \int_0^1 tdt + \int_0^a tg(t)dt = \int_0^a tg(t)dt.$$

Logo,  $\text{Im}(h_1) = [0, \int_0^a tg(t)dt]$ .

**Lema 2.2.** *A função  $h_2$  (2.4) é decrescente e sua imagem é dada por  $\text{Im}(h_2) = [\int_b^0 tf(t)dt, 0]$ .*

**Demonstração.** Temos que

$$\begin{aligned}
 h_2'(m) &= \left( \int_b^{f^{-1}(m)} tf(t)dt \right)' + \left( \int_{f^{-1}(m)}^0 mtdt \right)' \\
 &= f^{-1}(m)m(f^{-1})'(m) - \left( m \int_0^{f^{-1}(m)} tdt \right)' \\
 &= mf^{-1}(m)(f^{-1})'(m) - \left( \int_0^{f^{-1}(m)} tdt + mf^{-1}(m)(f^{-1})'(m) \right) \\
 &= -\frac{(f^{-1}(m))^2}{2} < 0.
 \end{aligned}$$

Portanto  $h_2$  é decrescente. Agora,

$$h_2(0) = \int_b^{f^{-1}(0)} tf(t)dt + \int_{f^{-1}(0)}^0 0tdt = \int_b^b tf(t)dt = 0,$$

e,

$$h_2(1) = \int_b^{f^{-1}(1)} tf(t)dt + \int_{f^{-1}(1)}^0 1tdt = \int_b^0 tf(t)dt + \int_0^0 tdt = \int_b^0 tf(t)dt.$$

Logo,  $\text{Im}(h_2) = [\int_b^0 tf(t)dt, 0]$ .

**Lema 2.3.** *Seja  $\phi : I = [d_1, d_2] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^2$ . Se  $\phi''(z) > 0, \forall z \in (d_1, d_2)$  e  $\phi(d_1) < 0$ , então  $\phi$  possui no máximo uma raiz em  $I$ .*

**Demonstração.** Suponhamos que existam  $z_1, z_2 \in I$  tais que  $z_1 < z_2$  e  $\phi(z_1) = \phi(z_2) = 0$ . De  $\phi''(z) > 0$ , temos que  $\phi$  não é constante. Daí, pelo Teorema de Rolle, existe  $c \in (z_1, z_2)$  tal que  $\phi'(c) = 0$ . Logo,  $c$  é ponto de mínimo, pois  $\phi''(c) > 0$ . Mas,  $\phi(d_1) < 0 \Rightarrow \phi(c) > 0$ . Como  $\phi$  é contínua, existe  $z_0 \in (z_1, z_2)$  tal que  $\phi(c) > \phi(z_0) > 0$ , absurdo! Logo  $\phi$  tem no máximo uma raiz.

**Lema 2.4.** *Seja  $\phi : I = [d_1, d_2] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^2$ . Se  $\phi''(z) < 0, \forall z \in (d_1, d_2)$  e  $\phi(d_1) > 0$ , então  $\phi$  possui no máximo uma raiz em  $I$ .*

**Demonstração.** Análoga à demonstração do Lema 2.3.

Considerando ainda o sistema p-fuzzy  $(r, s) \rightarrow (g, f)$  da Figura 2.2, suponhamos que  $g(t) > f(-t), \forall t \in D_g = [0, a]$  e  $-t \in D_f = [b, 0]$ , então  $a \geq -b$ . Com efeito, se  $a < -b$ , então  $b < -a < 0 \Rightarrow -a \in D_f$  e como  $g(t) > f(-t), \forall t \in D_g$  e  $-t \in D_f$ , então  $0 = g(a) > f(-a) > 0$ , o que é um absurdo!

**Observação 2.1.** *Note que usamos  $D_f$  e  $D_g$  para representar respectivamente  $\text{supp}(\widehat{\Delta}) \cap \mathbb{R}^-$  e  $\text{supp}(\widehat{\Delta}) \cap \mathbb{R}^+$ .*

**Lema 2.5.** Se  $g(t) > f(-t), \forall t \in [0, -b]$ , então  $g^{-1}(k) > -f^{-1}(k), \forall k \in [0, 1]$ .

**Demonstração.** Suponhamos por absurdo que  $g^{-1}(k) \leq -f^{-1}(k)$  para algum  $k \in [0, 1]$ . Temos que:

$$0 \leq g^{-1}(k) \leq -f^{-1}(k) \leq -b \leq a \Rightarrow -f^{-1}(k) \in D_g.$$

Como  $g$  é não-crescente, temos que:

$$k = g(g^{-1}(k)) \geq g(-f^{-1}(k)) > f(f^{-1}(k)) = k,$$

o que é um absurdo!

**Lema 2.6.** Se  $g(t) > f(-t), \forall t \in [0, -b]$ , então para  $m, n \in [0, 1]$  com  $m \leq n$  tem-se,

$$\Delta(x) = \frac{h_1(n) + h_2(m)}{A(m, n)} > 0.$$

**Demonstração.** Seja  $H(m, n) = h_1(n) + h_2(m)$ , é suficiente mostrarmos que  $H(m, n) > 0$ , pois  $A(m, n) > 0$ . Vamos mostrar inicialmente que dado  $k \in [0, 1]$  tem-se  $H(k, k) > 0$ , para isto consideremos dois casos.

Suponhamos primeiro que  $k \in [0, 1]$  é tal que  $g^{-1}(k) \leq -b$ . Temos que,

$$H(k, k) = h_1(k) + h_2(k) = \int_0^{g^{-1}(k)} ktdt + \int_{g^{-1}(k)}^a tg(t)dt + \int_b^{f^{-1}(k)} tf(t)dt + \int_{f^{-1}(k)}^0 ktdt$$

Usando o Lema 2.5 tem-se  $\int_0^{g^{-1}(k)} ktdt = \int_0^{-f^{-1}(k)} ktdt + \int_{-f^{-1}(k)}^{g^{-1}(k)} ktdt$ , então,

$$H(k, k) = \int_0^{-f^{-1}(k)} ktdt + \int_{-f^{-1}(k)}^{g^{-1}(k)} ktdt + \int_{g^{-1}(k)}^a tg(t)dt + \int_b^{f^{-1}(k)} tf(t)dt + \int_{f^{-1}(k)}^0 ktdt \quad (2.6)$$

Como  $\int_0^{-f^{-1}(k)} ktdt = -\int_{f^{-1}(k)}^0 ktdt$ , então de (2.6),

$$H(k, k) = \int_{-f^{-1}(k)}^{g^{-1}(k)} ktdt + \int_{g^{-1}(k)}^a tg(t)dt + \int_b^{f^{-1}(k)} tf(t)dt \quad (2.7)$$

Temos que  $\int_b^{f^{-1}(k)} tf(t)dt = -\int_{-f^{-1}(k)}^{-b} tf(-t)dt = -\int_{-f^{-1}(k)}^{g^{-1}(k)} tf(-t)dt - \int_{g^{-1}(k)}^{-b} tf(-t)dt$ , pois  $g^{-1}(k) \leq -b$ . Substituindo este resultado em (2.7) tem-se,

$$H(k, k) = \int_{-f^{-1}(k)}^{g^{-1}(k)} ktdt + \int_{g^{-1}(k)}^a tg(t)dt - \int_{-f^{-1}(k)}^{g^{-1}(k)} tf(-t)dt - \int_{g^{-1}(k)}^{-b} tf(-t)dt \quad (2.8)$$

Podemos reescrever (2.8) da forma,

$$H(k, k) = \int_{-f^{-1}(k)}^{g^{-1}(k)} [kt - tf(-t)]dt + \int_{g^{-1}(k)}^a tg(t)dt - \int_{g^{-1}(k)}^{-b} tf(-t)dt \quad (2.9)$$

Como  $a > -b$  de (2.9) tem-se,

$$H(k, k) = \int_{-f^{-1}(k)}^{g^{-1}(k)} [kt - tf(-t)]dt + \int_{g^{-1}(k)}^{-b} [tg(t) - tf(-t)]dt + \int_{-b}^a tg(t)dt \quad (2.10)$$

Como para todo  $t \in [-f^{-1}(k), -b]$  tem-se  $k > f(t) = f(-t) \Leftrightarrow kt - tf(-t) > 0$  e do Lema 2.5 tem-se  $tg(t) - tf(-t) > 0$  então todos os termos de (2.10) são positivos, portanto:  $H(k, k) > 0$ .

Se dado  $k \in [0, 1]$  tivermos  $g^{-1}(k) > -b$  a demonstração é análoga. Então, em qualquer caso, tem-se:

$$H(k, k) > 0. \quad (2.11)$$

Dados  $m, n \in [0, 1]$ ,  $m \leq n$  temos de (2.11) que  $h_1(m) + h_2(m) > 0 \Leftrightarrow -h_2(m) < h_1(m)$ .

Como  $h_1$  é crescente tem-se  $-h_2(m) < h_1(m) \leq h_1(n)$ . Logo,  $H(n, m) > 0 \Rightarrow \Delta(x) > 0$ .

**Lema 2.7.** *Se  $g(t) < f(-t)$ ,  $\forall t \in [0, a]$ , e  $m, n \in [0, 1]$  com  $m \geq n$  então  $H(n, m) < 0$ .*

**Demonstração.** Análoga à demonstração do Lema 2.6.

**Observação 2.2.** *Observe que o Lema 2.6 mostra que se  $g(t) > f(-t)$  então  $x^* \notin [c_1, z_0]$ , pois  $x^* \in [c_1, z_0] \Leftrightarrow m \leq n$ . Já o Lema 2.7 mostra que se  $g(t) < f(-t)$  então  $x^* \notin [z_0, c_2]$ , pois  $x^* \in [z_0, c_2] \Leftrightarrow m \geq n$ .*

## 2.4 Existência de ponto de equilíbrio

**Teorema 2.1.** *Seja  $S$  um sistema p-fuzzy  $(r, s) \rightarrow (g, f)$  e  $\text{supp}(A^*) \neq \emptyset$  um conjunto viável de equilíbrio de  $S$ . Então,  $\text{supp}(A^*)$  possui ao menos um ponto de equilíbrio. Isto é, existe  $x^* \in \text{supp}(A^*)$  tal que  $\Delta(x^*) = 0$ .*

**Demonstração.** Dado  $x \in \text{supp}(A^*)$ , pela Definição 2.1,  $x$  é ponto de equilíbrio se, e somente se,

$$\Delta(x) = 0 \Leftrightarrow h_1(n) + h_2(m) = 0.$$

Se  $r(c_1) = 0$ , então

$$\Delta(c_1) = h_1(r(c_1)) + h_2(s(c_1)) = h_1(0) + h_2(0) = 0,$$

e, portanto  $c_1$  é ponto de equilíbrio. Se  $s(c_2) = 0$  tem-se  $\Delta(c_2) = 0$ , donde  $c_2$  é ponto de equilíbrio. Suponhamos que  $r(c_1) > 0$  e  $s(c_2) > 0$ . Como  $s(c_1) = 0$ , então, do Lema 2.1 e Lema 2.2,  $h_1(r(c_1)) > 0$  e  $h_2(s(c_1)) = 0$ . Daí,

$$\Delta(c_1) = h_1(r(c_1)) + h_2(s(c_1)) = h_1(r(c_1)) > 0.$$

Analogamente,

$$\Delta(c_2) = h_1(r(c_2)) + h_2(s(c_2)) = h_2(s(c_2)) < 0.$$

Como  $\Delta$  é contínua, pelo Teorema do Valor Intermediário existe  $x^* \in [c_1, c_2]$  tal que  $\Delta(x^*) = 0 \Rightarrow x^*$  é ponto de equilíbrio.

**Observação 2.3.** *Se considerarmos no Teorema 2.1, ao invés de  $S$  do tipo  $(r, s) \rightarrow (g, f)$ , um sistema do tipo  $(r, s) \rightarrow (f, g)$ , o resultado seria análogo. Isto é, dado um conjunto viável de equilíbrio  $\text{supp}(A^*)$ , existe um ponto de equilíbrio  $x^* \in \text{supp}(A^*)$ .*

## 2.5 Determinação do ponto de equilíbrio - saída simétrica

**Proposição 2.1.** *Seja  $S$  um sistema p-fuzzy  $(r, s) \rightarrow (g, f)$  e  $\text{supp}(A^*) \neq \emptyset$  um conjunto viável de equilíbrio de  $S$ . Se  $f$  e  $g$  são monótonas e simétricas, isto é,  $f(t) = g(-t)$ , então um ponto de equilíbrio de  $S$  é  $x^*$  onde  $A(x^*) = r \cap s = \max\{\min(r(x), s(x)); x \in \text{supp}(A^*)\}$ .*

**Demonstração.** Como  $f(t) = g(-t)$ , então  $f(-a) = g(a) = 0 = f(b) \Rightarrow b = -a$ , pois  $f$  é monótona. Temos ainda que,  $f(t) = g(-t) \Rightarrow g^{-1}(f(t)) = -t = -f^{-1}(f(t)) \Rightarrow g^{-1}(y) = -f^{-1}(y)$ . Lembremos que  $\Delta(x^*) = 0 \Leftrightarrow h_1(n) = -h_2(m)$ , onde  $n = r(x^*)$  e  $m = s(x^*)$ . Como  $b = -a$ , da equação (2.4),

$$h_2(m) = \int_{-a}^{f^{-1}(m)} tf(t)dt + \int_{f^{-1}(m)}^0 mtdt.$$

Fazendo  $u = -t$ , temos:

$$du = -dt \Rightarrow dt = -du.$$

Daí,

$$\begin{aligned} h_2(m) &= \int_a^{-f^{-1}(m)} (-u)f(-u)(-du) + \int_{-f^{-1}(m)}^0 m(-u)(-du) \\ &= \int_a^{-f^{-1}(m)} uf(-u)du + \int_{-f^{-1}(m)}^0 mudu \\ &= \int_a^{g^{-1}(m)} ug(u)du + \int_{g^{-1}(m)}^0 mudu \\ &= -\int_0^{g^{-1}(m)} mudu - \int_{g^{-1}(m)}^a ug(u)du \\ &= -h_1(m). \end{aligned}$$

Isto é,  $h_2 = -h_1$ . Daí,  $h_1(n) = -h_2(m) \Leftrightarrow h_1(n) = h_1(m) \Leftrightarrow m = n$  (pois  $h_1$  é crescente - Lema 2.1), portanto  $A(x^*) = r \cap s$ .

**Observação 2.4.** *Se o sistema S for  $(r, s) \rightarrow (f, g)$  o resultado da Proposição 2.1 é o mesmo.*

## 2.6 Unicidade do ponto de equilíbrio

Suporemos nesta seção que o conjunto viável de equilíbrio é tal que  $r(c_1), s(c_2) > 0$ . Dividiremos o problema da unicidade do ponto de equilíbrio em dois casos. Inicialmente, suporemos que  $z_1 \leq c_1$  e  $c_2 \leq z_2$ , ou seja,  $\text{supp}(A^*) \subset [z_1, z_2]$ .

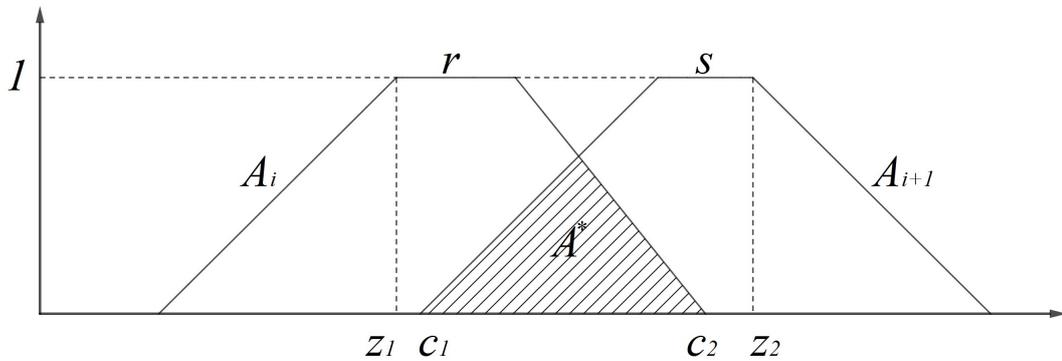


Figura 2.3: Conjunto viável de equilíbrio

**Teorema 2.2.** *Seja S um sistema p-fuzzy  $(r, s) \rightarrow (g, f)$  e  $\text{supp}(A^*) \neq \emptyset$  um conjunto viável de equilíbrio de S. Se as funções r e s são monótonas por partes e  $A^*$  é tal que  $c_1 \geq z_1$  e  $c_2 \leq z_2$  (Figura 2.3), então existe um único ponto de equilíbrio em  $\text{supp}(A^*)$ .*

**Demonstração.** Dado  $x \in \text{supp}(A^*)$ , temos que:

$$\Delta(x) = h_1(n) + h_2(m) = h_1(r(x)) + h_2(s(x)).$$

Usando os Lemas 2.1 e 2.2 e a regra da cadeia, temos:

$$\begin{aligned} \Delta'(x) &= h_1'(r(x))r'(x) + h_2'(s(x))s'(x) \\ &= \frac{(g^{-1}(r(x)))^2}{2}r'(x) - \frac{(f^{-1}(s(x)))^2}{2}s'(x). \end{aligned}$$

Como em  $[c_1, c_2]$ , r é não crescente e s é não decrescente, então  $r'(x) \leq 0$  e  $s'(x) \geq 0$ . Assim, temos os seguintes casos:

- 1)  $r'(x) = 0 \Rightarrow s'(x) > 0 \Rightarrow \Delta'(x) = -\frac{(f^{-1}(s(x)))^2}{2} s'(x) < 0$ ;
- 2)  $r'(x) < 0$  e  $s'(x) > 0 \Rightarrow \frac{(g^{-1}(r(x)))^2}{2} r'(x) < 0$  e  $-\frac{(f^{-1}(s(x)))^2}{2} s'(x) < 0 \Rightarrow \Delta'(x) < 0$ ;
- 3)  $s'(x) = 0 \Rightarrow r'(x) < 0 \Rightarrow \Delta'(x) = \frac{(g^{-1}(r(x)))^2}{2} r'(x) < 0$ .

Logo, em qualquer caso, tem-se  $\Delta'(x) < 0$ . Portanto  $\Delta$  é decrescente. Como pelo Teorema da existência de ponto de equilíbrio, existe um ponto de equilíbrio em  $\text{supp}(A^*)$ , ele é único.

Consideremos o caso em que o conjunto viável de equilíbrio,  $\text{supp}(A^*)$ , pode não ter o comportamento descrito anteriormente, isto é, pode-se ter  $c_1 < z_1$  ou  $c_2 > z_2$ .

Dividiremos este caso em duas subseções. Inicialmente, suporemos que  $g(t) > f(-t)$ .

### 2.6.1 Caso 1: $g(t) > f(-t)$ .

**Teorema 2.3.** *Seja S um sistema p-fuzzy  $(r, s) \rightarrow (g, f)$  e  $\text{supp}(A^*) \neq \emptyset$  um conjunto viável de equilíbrio de S. Se as funções  $r, s, f, g \in C^1$ ;  $r$  e  $s$  são monótonas por partes,  $f$  e  $g$  estritamente monótonas, tais que:*

- (i)  $g(t) > f(-t), \forall t \in (0, -b)$ ;
- (ii)  $\frac{g'(q)}{f'(p)} < \frac{p^3}{q^3}, \forall p \in \text{int}(D_f), q \in \text{int}(D_g)$  e  $f(p) > g(q)$ ;
- (iii)  $(\frac{s'(x)}{r'(x)})' \leq 0, \forall x \in (z_0, c_2), r(x) \neq s(x)$ .

Então S possui um único ponto de equilíbrio,  $x^*$  em  $\text{supp}(A^*)$ , e  $x^* \in (z_0, c_2]$ .

**Demonstração.** Dado  $x \in (z_0, c_2]$  (Figura 2.2),  $x$  determina um único par  $(n, m) \in [0, 1]^2$  tal que  $n = r(x)$  e  $m = s(x)$ . Pela monotonicidade de  $r$ , segue que para cada  $n \in [0, r(z_0))$  existe um único  $x \in (z_0, c_2]$  tal que  $n = r(x)$  e, como  $s$  é uma função, existe um único  $m \in [0, 1]$  tal que  $m = s(x)$ , ou seja, para cada  $n \in [0, r(z_0))$  existe um único  $m \in [0, 1]$  tal que  $n = r(x)$  e  $m = s(x)$ . Portanto, cada par  $(n, m)$  nestas condições, determina um único  $x \in (z_0, c_2]$ .

Pelo Teorema 2.1, existe um ponto de equilíbrio  $x^* \in [c_1, c_2] = [c_1, z_0] \cup (z_0, c_2]$ . Agora, veja que:

$$x \in [c_1, z_0] \Rightarrow m = s(x) \leq r(x) = n.$$

Daí, pelo Lema 2.6,  $\Delta(x) > 0$ . Logo,

$$x^* \notin [c_1, z_0] \Rightarrow x^* \in (z_0, c_2]$$

ou equivalentemente, existe um único  $(n^*, m^*)$  com  $n^* \in [0, r(z_0))$  tal que  $H(n^*, m^*) = 0$ .

Como para cada  $\mathbf{n} \in [0, r(z_0))$ , existe um único  $\mathbf{m} \in [0, 1]$  tal que  $\mathbf{n} = r(x)$  e  $\mathbf{m} = s(x)$ , então podemos definir uma função  $\delta : [0, r(z_0)) \rightarrow [0, 1]$  tal que

$$\mathbf{m} = \delta(\mathbf{n}) = s \circ r^{-1}(\mathbf{n}).$$

Além disso,

$$(r \circ r^{-1})'(\mathbf{n}) = (\mathbf{n})' \Rightarrow r'(r^{-1}(\mathbf{n}))(r^{-1})'(\mathbf{n}) = 1 \Rightarrow (r^{-1})'(\mathbf{n}) = \frac{1}{r'(r^{-1}(\mathbf{n}))}.$$

Daí, temos que:

$$\begin{aligned} \delta'(\mathbf{n}) &= (s \circ r^{-1})'(\mathbf{n}) \\ &= s'(r^{-1}(\mathbf{n}))(r^{-1})'(\mathbf{n}) \\ &= s'(r^{-1}(\mathbf{n})) \frac{1}{r'(r^{-1}(\mathbf{n}))} \\ &= \frac{s'(x)}{r'(x)}. \end{aligned}$$

Por (iii), segue que

$$\delta''(\mathbf{n}) \leq 0, \forall \mathbf{n} \in D_\delta. \quad (2.12)$$

Agora, observe que:

$$h_1(1) = \int_0^{g^{-1}(1)} t dt + \int_{g^{-1}(1)}^a tg(t) dt = \int_0^a tg(t) dt \quad (2.13)$$

$$-h_2(1) = - \int_b^{f^{-1}(1)} tf(t) dt - \int_{f^{-1}(1)}^0 t dt = - \int_b^0 tf(t) dt \quad (2.14)$$

Pela condição (i),

$$tg(t) > tf(-t), \forall t \in (0, -b).$$

Daí, segue que

$$\int_0^a tg(t) dt \geq \int_0^{-b} tg(t) dt > \int_0^{-b} tf(-t) dt = \int_0^b -uf(u)(-du) = - \int_b^0 uf(u) du \quad (2.15)$$

De (2.13), (2.14) e (2.15), vem que

$$h_1(1) > -h_2(1).$$

Dado  $\mathbf{n} \in [0, h_1^{-1}(-h_2(1))]$ , existe um único  $\mathbf{m} \in [0, 1]$  tal que  $h_1(\mathbf{n}) = -h_2(\mathbf{m}) \Leftrightarrow h_1(\mathbf{n}) + h_2(\mathbf{m}) = 0$ . Daí, pode-se definir uma função injetiva  $\xi$ ,  $\mathbf{m} = \xi(\mathbf{n})$  tal que,

$$H^{-1}(0) = \{(\mathbf{n}, \mathbf{m}); \mathbf{m} = \xi(\mathbf{n})\},$$

onde  $H : [0, h_1^{-1}(-h_2(1))] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  é dada por  $H(\mathbf{n}, \mathbf{m}) = h_1(\mathbf{n}) + h_2(\mathbf{m})$ .

Vimos no Lema 2.1 que  $\frac{\partial H}{\partial \mathbf{n}} = h_1'(\mathbf{n}) = \frac{(g^{-1}(\mathbf{n}))^2}{2} > 0$  e vimos no Lema 2.2 que  $\frac{\partial H}{\partial \mathbf{m}} = h_2'(\mathbf{m}) = -\frac{(f^{-1}(\mathbf{m}))^2}{2} < 0$ . Então, pelo Teorema da Função Implícita,  $\xi$  é k-vezes diferenciável e, além disso:

$$\xi'(\mathbf{n}) = -\frac{\frac{dh_1}{dn}}{\frac{dh_2}{dm}} = \left[ \frac{g^{-1}(\mathbf{n})}{f^{-1}(\mathbf{m})} \right]^2 > 0, \forall \mathbf{n} \in (0, h_1^{-1}(-h_2(1))), \mathbf{m} \in (0, 1), \mathbf{m} = \xi(\mathbf{n}). \quad (2.16)$$

Logo,  $\xi$  é uma função estritamente crescente e como

$$H(0, 0) = h_1(0) + h_2(0) = 0$$

e

$$H(h_1^{-1}(-h_2(1)), 1) = h_1(h_1^{-1}(-h_2(1))) + h_2(1) = -h_2(1) + h_2(1) = 0$$

então  $D_\xi = [0, h_1^{-1}(h_2(1))]$  e  $\text{Im}_\xi = [0, 1]$ .

Dados  $\mathbf{m}, \mathbf{n} \in (0, 1)$  existe um único  $\mathbf{p} \in (b, 0)$  tal que  $\mathbf{p} = f^{-1}(\mathbf{m})$  e existe um único  $\mathbf{q} \in (0, a)$  tal que  $\mathbf{q} = g^{-1}(\mathbf{n})$ , pois  $f$  e  $g$  são estritamente monótonas, por hipótese.

Do Lema 2.6, temos que  $\mathbf{m} \leq \mathbf{n} \Rightarrow H(\mathbf{m}, \mathbf{n}) > 0$ . Daí,  $H(\mathbf{m}, \mathbf{n}) = 0 \Rightarrow \mathbf{m} > \mathbf{n}$ . Temos que:

$$\mathbf{m} > \mathbf{n} \Leftrightarrow f(\mathbf{p}) > g(\mathbf{q}), \quad (2.17)$$

onde  $\mathbf{p} = f^{-1}(\mathbf{m})$  e  $\mathbf{q} = g^{-1}(\mathbf{n})$ . Além disso,

$$\mathbf{p} = f^{-1}(\mathbf{m}) \Leftrightarrow (f^{-1})'(\mathbf{m}) = \frac{1}{f'(\mathbf{p})} \quad (2.18)$$

e

$$\mathbf{q} = g^{-1}(\mathbf{n}) \Leftrightarrow (g^{-1})'(\mathbf{n}) = \frac{1}{g'(\mathbf{q})} \Leftrightarrow g'(\mathbf{q}) = \frac{1}{(g^{-1})'(\mathbf{n})}. \quad (2.19)$$

De (2.17) e (ii), segue que

$$\frac{g'(\mathbf{q})}{f'(\mathbf{p})} < \frac{\mathbf{p}^3}{\mathbf{q}^3}. \quad (2.20)$$

De (2.18), (2.19) e (2.20), segue que

$$\frac{(f^{-1})'(\mathbf{m})}{(g^{-1})'(\mathbf{n})} < \frac{[f^{-1}(\mathbf{m})]^3}{[g^{-1}(\mathbf{n})]^3}. \quad (2.21)$$

Como  $g^{-1}(\mathbf{n}) > 0 \Rightarrow [g^{-1}(\mathbf{n})]^3 > 0$ , temos que

$$\frac{(f^{-1})'(\mathbf{m})[g^{-1}(\mathbf{n})]^3}{(g^{-1})'(\mathbf{n})} < [f^{-1}(\mathbf{m})]^3. \quad (2.22)$$

Como  $g'(q) < 0 \Rightarrow (g^{-1})'(n) = \frac{1}{g'(q)} < 0$ , temos que

$$(f^{-1})'(m)[g^{-1}(n)]^3 > (g^{-1})'(n)[f^{-1}(m)]^3. \quad (2.23)$$

Logo,

$$(f^{-1})'(m)[g^{-1}(n)]^3 - (g^{-1})'(n)[f^{-1}(m)]^3 > 0. \quad (2.24)$$

Derivando  $\xi'$ , de (2.16), tem-se

$$\begin{aligned} \xi''(n) &= 2 \frac{g^{-1}(n)}{f^{-1}(m)} \left[ \frac{g^{-1}(n)}{f^{-1}(\xi(n))} \right]' \\ &= 2 \frac{g^{-1}(n)}{f^{-1}(m)} \left[ \frac{(g^{-1})'(n)f^{-1}(m) - g^{-1}(n)(f^{-1})'(m) \left( \frac{[g^{-1}(n)]^2}{[f^{-1}(m)]^2} \right)}{[f^{-1}(m)]^2} \right] \\ &= 2 \frac{g^{-1}(n)}{f^{-1}(m)} \left[ \frac{(g^{-1})'(n)[f^{-1}(m)]^3 - (f^{-1})'(m)[g^{-1}(n)]^3}{[f^{-1}(m)]^4} \right] \\ &= -2 \frac{g^{-1}(n)}{[f^{-1}(m)]^5} \{ (f^{-1})'(m)[g^{-1}(n)]^3 - (g^{-1})'(n)[f^{-1}(m)]^3 \}. \end{aligned}$$

Como  $-2 \frac{g^{-1}(n)}{[f^{-1}(m)]^5} > 0, \forall m, n \in (0, 1)$ , de (2.24) tem-se,

$$\xi''(n) > 0, \forall n \in \text{int}(D_\xi). \quad (2.25)$$

Tomemos agora  $I = D_\xi \cap D_\delta = D_\xi \cap [0, r(z_0))$  e definamos a função  $\phi : I \rightarrow [0, 1]$  tal que,

$$\phi(n) = \xi(n) - \delta(n) \quad (2.26)$$

Então, de (2.12) e (2.25) tem-se  $\phi''(n) > 0, \forall n \in \text{int}(I)$ . Com  $\xi(0) = 0$  e  $\delta(0) = s \circ r^{-1}(0) = s(c_2) > 0$ , então tem-se  $\phi(0) < 0$ . Daí, pelo Lema 2.3 temos que existe um único  $n^* \in I$  tal que,

$$\phi(n^*) = 0 \Leftrightarrow \xi(n^*) = \delta(n^*) \quad (2.27)$$

Como  $\xi = H^{-1}(0)$  então, temos que

$$0 = H(n^*, \xi(n^*)) = H(n^*, \delta(n^*))$$

Logo, existe um único  $x^* \in (z_0, c_2], n^* = r(x)$  e  $m^* = \delta(n^*) = s \circ r^{-1}(r(x^*)) = s(x^*)$  tal que,

$$\Delta(x^*) = \frac{H(n^*, m^*)}{\Lambda(n^*, m^*)} = 0,$$

o que conclui a demonstração do teorema.

### 2.6.2 Caso 2: $g(t) < f(-t)$

**Teorema 2.4.** *Seja  $S$  um sistema p-fuzzy  $(r, s) \rightarrow (g, f)$  e  $\text{supp}(A^*) \neq \emptyset$  um conjunto viável de equilíbrio de  $S$ . Se as funções  $r, s, f, g \in C^1$ ;  $r$  e  $s$  são monótonas por partes,  $f$  e  $g$  estritamente monótonas, tais que:*

$$(i) \quad g(t) < f(-t), \forall t \in (0, a);$$

$$(ii) \quad \frac{g'(q)}{f'(p)} > \frac{p^3}{q^3}, \forall p \in \text{int}(D_f), q \in \text{int}(D_g) \text{ e } f(p) < g(q);$$

$$(iii) \quad \left(\frac{r'(x)}{s'(x)}\right)' \leq 0, \forall x \in (c_1, z_0), r(x) \neq s(x).$$

Então  $S$  possui um único ponto de equilíbrio,  $x^*$  em  $\text{supp}(A^*)$ , e  $x^* \in [c_1, z_0]$ .

**Demonstração.** A demonstração deste teorema é análoga à demonstração do Teorema 2.3.

### 2.6.3 Consequências dos Teoremas 2.3 e 2.4

**Lema 2.8.** *Se  $f(p) > g(q)$  então  $q > -p$ , onde  $p = f^{-1}(m)$  e  $q = g^{-1}(n)$ .*

**Demonstração.** Temos que:

$$f(p) > g(q) \Rightarrow f(f^{-1}(m)) > g(g^{-1}(n)) \Rightarrow m > n.$$

Usando o Lema 2.5 e o fato de  $-f^{-1}$  ser decrescente, pois  $f$  é crescente, segue que:

$$q = g^{-1}(n) > -f^{-1}(n) > -f^{-1}(m) = -p.$$

**Lema 2.9.** *Se  $f(p) < g(q)$  então  $q < -p$ , onde  $p = f^{-1}(m)$  e  $q = g^{-1}(n)$ .*

**Demonstração.** Análoga à demonstração do Lema 2.8.

**Corolário 2.1.** *Seja  $S$  um sistema p-fuzzy e  $\text{supp}(A^*) \neq \emptyset$  um conjunto viável de equilíbrio de  $S$ . Se  $r, s, f$  e  $g$  forem números fuzzy triangulares então  $S$  possui um único ponto de equilíbrio em  $\text{supp}(A^*)$ .*

**Demonstração.** Demonstraremos o caso em que  $S$  é  $(r, s) \rightarrow (g, f)$ . Se  $S$  for  $(r, s) \rightarrow (f, g)$  a demonstração é análoga.

Se  $a = -b$  então  $f$  e  $g$  são simétricas, pela Proposição 2.1 o ponto de equilíbrio é único,

$$x^* \text{ onde } A(x^*) = r \cap s = \max\{\{\min(r(x), s(x))\}; x \in \text{supp}(A^*)\}$$

Suponhamos que  $a > -b$ , provemos que  $f, g, r$  e  $s$  satisfazem o Teorema 2.3. Com efeito, dado  $t \in (0, -b)$ , temos que:

$$\begin{aligned} a > -b &\Rightarrow 1 > -\frac{b}{a} \\ &\Rightarrow \frac{1}{b} < -\frac{1}{a} \\ &\Rightarrow \frac{1}{b}t < -\frac{1}{a}t \\ &\Rightarrow -\frac{1}{b}(-t) + 1 < -\frac{1}{a}t + 1 \\ &\Rightarrow f(-t) < g(t). \end{aligned}$$

Logo,  $f$  e  $g$  satisfazem o item (i) do Teorema 2.3.

Agora, provemos que  $f$  e  $g$  satisfazem o item (ii) do Teorema 2.3. Temos que:

$$f(p) > g(q) \Rightarrow -\frac{p}{b} + 1 > -\frac{q}{a} + 1 \Rightarrow \frac{p}{b} < \frac{q}{a} \Rightarrow \frac{p}{bq} < \frac{1}{a} \Rightarrow \frac{p}{q} > \frac{b}{a}.$$

Além disso,

$$\frac{g'(q)}{f'(p)} = \frac{-\frac{1}{a}}{-\frac{1}{b}} = \frac{b}{a}.$$

Portanto, tem-se:

$$\frac{p}{q} > \frac{g'(q)}{f'(p)}.$$

Segue do Lema 2.8 que:

$$q > -p \Rightarrow 1 > -\frac{p}{q} \Rightarrow -\frac{p}{q} > \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow \frac{p^2}{q^2} > -\frac{p^3}{q^3} \Rightarrow -\frac{p}{q} > -\frac{p^3}{q^3} \Rightarrow \frac{p}{q} < \frac{p^3}{q^3}.$$

Daí,

$$\frac{g'(q)}{f'(p)} < \frac{p^3}{q^3}.$$

Finalmente, provemos que  $r$  e  $s$  satisfazem o item (iii) do Teorema 2.3. Dado  $x \in (z_0, c_2)$ , temos que:

$$r'(x) = \left(\frac{1}{z_1 - c_2}x - \frac{c_2}{z_1 - c_2}\right)' = \frac{1}{z_1 - c_2}$$

e

$$s'(x) = \left(\frac{1}{z_2 - c_1}x - \frac{c_1}{z_2 - c_1}\right)' = \frac{1}{z_2 - c_1}.$$

Daí, segue que:

$$\left[\frac{s'(x)}{r'(x)}\right]' = \left[\frac{\frac{1}{z_2 - c_1}}{\frac{1}{z_1 - c_2}}\right]' = 0.$$

Portanto  $f, g, r$  e  $s$  satisfazem o Teorema 2.3. Se  $a < b$ , de forma semelhante a demonstração acima, prova-se que  $f, g, r$  e  $s$  satisfazem o Teorema 2.4. O que conclui a demonstração.

**Corolário 2.2.** *Seja  $S$  um sistema p-fuzzy e  $\text{supp}(A^*) \neq \emptyset$  um conjunto viável de equilíbrio de  $S$ . Se  $r$  e  $s$  são números fuzzy trapezoidais e  $f$  e  $g$  são triangulares então  $S$  possui um único ponto de equilíbrio em  $\text{supp}(A^*)$ .*

**Demonstração.** Análoga à demonstração do Corolário 2.1.

**Corolário 2.3.** *Seja  $S$  um sistema p-fuzzy  $(r, s) \rightarrow (g, f)$  e  $\text{supp}(A^*) \neq \emptyset$  um conjunto viável de equilíbrio de  $S$ . Se  $S$  possui um único ponto de equilíbrio em  $\text{supp}(A^*)$ , então o sistema  $(r_\sigma, s_\sigma) \rightarrow (g, f)$ , onde  $r_\sigma(x) = \min\{r(x), \sigma\}$ ,  $s_\sigma(x) = \min\{s(x), \sigma\}$  e  $\sigma \in (0, 1)$  (Figura 2.4), possui um único ponto de equilíbrio em  $\text{supp}(A^*)$ .*

**Demonstração.** Dado  $\sigma \in (0, 1)$ , temos que:

$$r_\sigma(c_1) = \min\{r(c_1), \sigma\} > 0$$

$$s_\sigma(c_1) = \min\{s(c_1), \sigma\} = \min\{0, \sigma\} = 0$$

$$s_\sigma(c_2) = \min\{s(c_2), \sigma\} > 0$$

$$r_\sigma(c_2) = \min\{r(c_2), \sigma\} = \min\{0, \sigma\} = 0$$

então,

$$H(r_\sigma(c_1), s_\sigma(c_1)) = h_1(r_\sigma(c_1)) + h_2(0) = h_1(r_\sigma(c_1)) > 0$$

e

$$H(r_\sigma(c_2), s_\sigma(c_2)) = h_1(0) + h_2(s_\sigma(c_2)) = h_2(s_\sigma(c_2)) < 0.$$

Pelo Teorema do Valor Intermediário, existe  $\bar{x} \in [c_1, c_2]$  tal que  $H(r_\sigma(\bar{x}), s_\sigma(\bar{x})) = 0$ .

Agora, vamos provar a unicidade. Demonstraremos o caso em que o sistema satisfaz o Teorema 2.3.

Suponhamos que  $g(t) > f(-t)$ . Dado  $x \in (z_0, c_2)$  temos que

$$r_\sigma(x) \neq s_\sigma(x) \Rightarrow r_\sigma(x) = r(x) \text{ e } s_\sigma(x) = \begin{cases} \sigma \\ \text{ou} \\ s(x) \end{cases} .$$

Portanto,  $\frac{s'_\sigma(x)}{r'_\sigma(x)} = 0$  ou  $\frac{s'_\sigma(x)}{r'_\sigma(x)} = \frac{s'(x)}{r'(x)}$ . Em ambos os casos temos  $[\frac{s'_\sigma(x)}{r'_\sigma(x)}]' \leq 0$ . Logo,  $r_\sigma$  e  $s_\sigma$  satisfazem a condição (iii) do Teorema 2.3 e como as funções  $f$  e  $g$  satisfazem as condições (i) e (ii), então existe um único ponto de equilíbrio.

Se, por outro lado, tivemos  $g(t) < f(-t)$ , demonstra-se de modo análogo que  $s_\sigma$  e  $r_\sigma$  satisfazem a condição (iii) do Teorema 2.4. O que conclui a demonstração do Corolário.

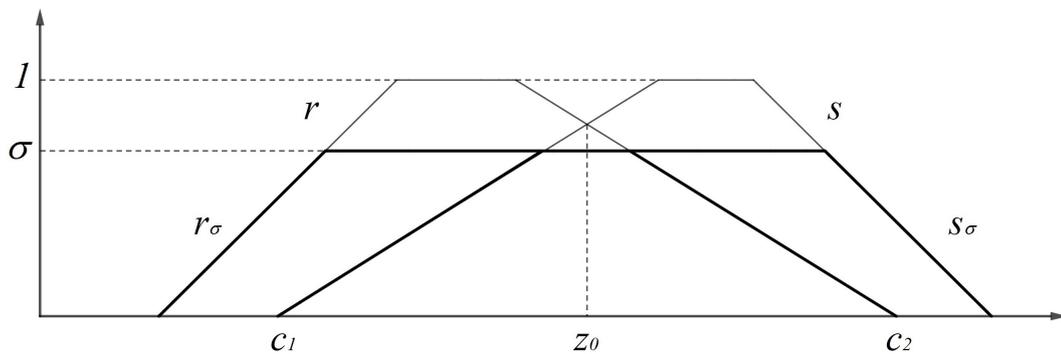


Figura 2.4: Funções r-sigma e s-sigma

# Capítulo 3

## Sistema p-fuzzy bidimensional

Neste capítulo estenderemos a teoria abordada no capítulo 2 para os sistemas p-fuzzy bidimensionais.

### 3.1 Definições preliminares

Sejam  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  duas variáveis de estado, um *sistema dinâmico p-fuzzy bidimensional* é um sistema de equações de diferenças, dado por:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \Delta_1(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n) \\ \mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \Delta_2(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n) \end{cases}, \quad (3.1)$$

onde  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \in \mathbb{R}^2$  é a condição inicial e  $\Delta(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n) = (\Delta_1(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n), \Delta_2(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n))$  é obtido por meio de um sistema baseado em regras fuzzy. O sistema (3.1) pode ser reescrito como,

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{n+1} = F(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n) \\ \mathbf{y}_{n+1} = G(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n) \end{cases}, \quad (3.2)$$

onde  $F(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n) = \mathbf{x}_n + \Delta_1(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n)$  e  $G(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n) = \mathbf{y}_n + \Delta_2(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n)$ .

Dizemos que um par  $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$  é um *ponto de equilíbrio* de 3.2 se,

$$\begin{cases} \mathbf{x}^* = F(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \\ \mathbf{y}^* = G(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_1(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) = 0 \\ \Delta_2(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) = 0 \end{cases}$$

**Definição 3.1.** *Sejam  $\{A_i\}_{1 \leq i \leq k_1}$  e  $\{B_j\}_{1 \leq j \leq k_2}$ , famílias de subconjuntos fuzzy, respectivamente. Se  $\text{supp}(A^*)$  e  $\text{supp}(B^*)$  são conjuntos viáveis de equilíbrio, conforme Definição 2.3, então dizemos que  $R^* = \text{supp}(A^*) \times \text{supp}(B^*)$  é uma região viável de equilíbrio para o sistema p-fuzzy (3.1).*

### 3.2 Defuzificação da saída do sistema baseado em regras fuzzy

Consideremos agora o sistema p-fuzzy bidimensional associado ao sistema fuzzy de Mamdani cujas regras são as seguintes:

$R_1$ : Se  $x$  é  $A_1$  e  $y$  é  $B_1$ , então  $\Delta_1$  é  $g_1$  e  $\Delta_2$  é  $f_2$

$R_2$ : Se  $x$  é  $A_1$  e  $y$  é  $B_2$ , então  $\Delta_1$  é  $f_1$  e  $\Delta_2$  é  $f_2$

$R_3$ : Se  $x$  é  $A_2$  e  $y$  é  $B_1$ , então  $\Delta_1$  é  $g_1$  e  $\Delta_2$  é  $g_2$

$R_4$ : Se  $x$  é  $A_2$  e  $y$  é  $B_2$ , então  $\Delta_1$  é  $f_1$  e  $\Delta_2$  é  $g_2$

Dado  $(x_0, y_0) \in R^*$ , para obter  $\Delta_1(x_0, y_0)$  e  $\Delta_2(x_0, y_0)$ , utilizando o método de inferência de Mandani e o método de defuzificação centro de massa. Devemos inicialmente traduzir matematicamente o antecedente de cada uma das regras (Figura 3.1).

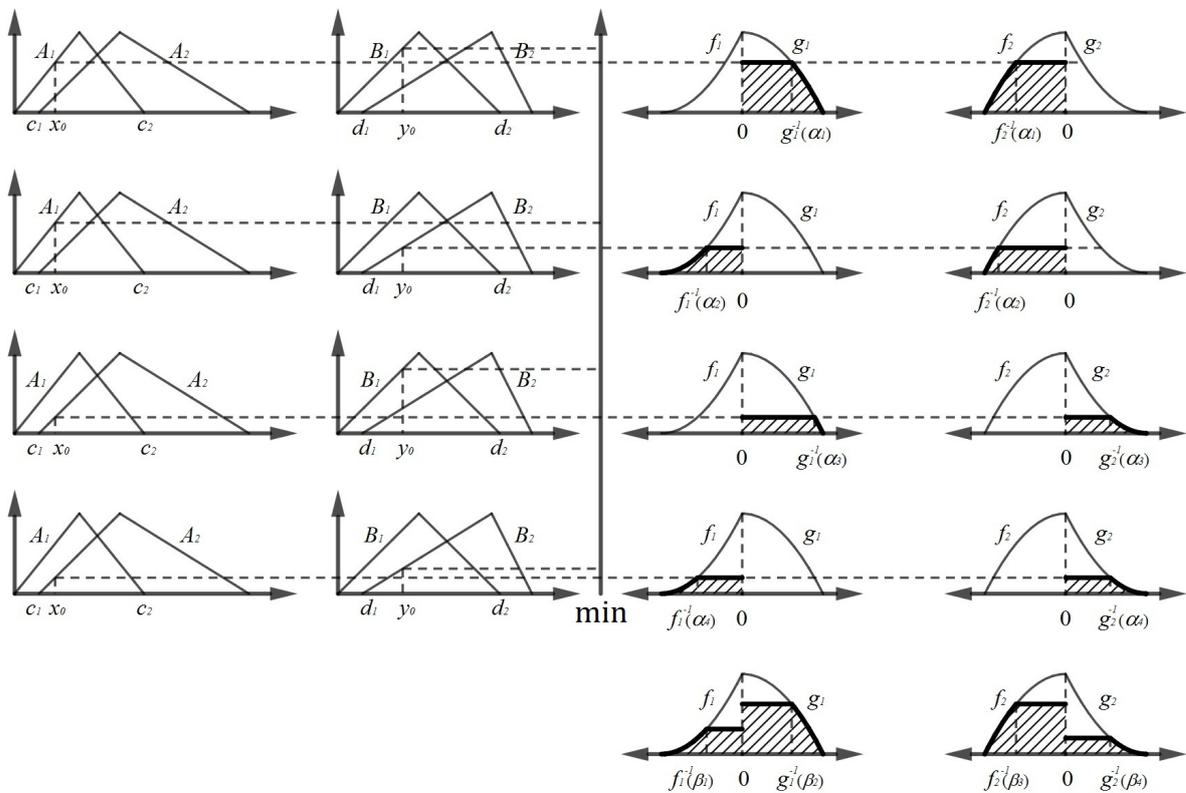


Figura 3.1: Sistema p-fuzzy bidimensional

Temos que:

$$\alpha_1 = \min\{A_1(x_0), B_1(y_0)\} \quad (3.3)$$

$$\alpha_2 = \min\{A_1(x_0), B_2(y_0)\} \quad (3.4)$$

$$\alpha_3 = \min\{A_2(x_0), B_1(y_0)\} \quad (3.5)$$

$$\alpha_4 = \min\{A_2(x_0), B_2(y_0)\} \quad (3.6)$$

Em seguida, calculamos  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  e  $\beta_4$ . Neste caso,

$$\beta_1 = \max\{\alpha_2, \alpha_4\} \quad (3.7)$$

$$\beta_2 = \max\{\alpha_1, \alpha_3\} \quad (3.8)$$

$$\beta_3 = \max\{\alpha_1, \alpha_2\} \quad (3.9)$$

$$\beta_4 = \max\{\alpha_3, \alpha_4\} \quad (3.10)$$

Finalmente, calculamos  $\Delta_1$  e  $\Delta_2$ ,

$$\Delta_1(x_0, y_0) = \frac{\int_b^{f_1^{-1}(\beta_1)} tf_1(t)dt + \int_{f_1^{-1}(\beta_1)}^0 \beta_1 tdt + \int_0^{g_1^{-1}(\beta_2)} \beta_2 tdt + \int_{g_1^{-1}(\beta_2)}^a tg_1(t)dt}{\int_0^{\beta_2} g_1^{-1}(t)dt - \int_0^{\beta_1} f_1^{-1}(t)dt} \quad (3.11)$$

$$\Delta_2(x_0, y_0) = \frac{\int_d^{f_2^{-1}(\beta_3)} tf_2(t)dt + \int_{f_2^{-1}(\beta_3)}^0 \beta_3 tdt + \int_0^{g_2^{-1}(\beta_4)} \beta_4 tdt + \int_{g_2^{-1}(\beta_4)}^c tg_2(t)dt}{\int_0^{\beta_4} g_2^{-1}(t)dt - \int_0^{\beta_3} f_2^{-1}(t)dt} \quad (3.12)$$

As equações (3.11) e (3.12) podem ser reescritas como:

$$\Delta_1(x_0, y_0) = \frac{h_1^1(\beta_1) + h_2^1(\beta_2)}{A^1(\beta_1, \beta_2)} \quad (3.13)$$

$$\Delta_2(x_0, y_0) = \frac{h_1^2(\beta_3) + h_2^2(\beta_4)}{A^2(\beta_3, \beta_4)} \quad (3.14)$$

onde,

$$h_1^1(\beta_1) = \int_b^{f_1^{-1}(\beta_1)} tf_1(t)dt + \int_{f_1^{-1}(\beta_1)}^0 \beta_1 tdt \quad (3.15)$$

$$h_2^1(\beta_2) = \int_0^{g_1^{-1}(\beta_2)} \beta_2 tdt + \int_{g_1^{-1}(\beta_2)}^a tg_1(t)dt \quad (3.16)$$

$$A^1(\beta_1, \beta_2) = \int_0^{\beta_2} g_1^{-1}(t)dt - \int_0^{\beta_1} f_1^{-1}(t)dt \quad (3.17)$$

$$h_1^2(\beta_3) = \int_d^{f_2^{-1}(\beta_3)} tf_2(t)dt + \int_{f_2^{-1}(\beta_3)}^0 \beta_3 tdt \quad (3.18)$$

$$h_2^2(\beta_4) = \int_0^{g_2^{-1}(\beta_4)} \beta_4 tdt + \int_{g_2^{-1}(\beta_4)}^c tg_2(t)dt \quad (3.19)$$

$$A^2(\beta_3, \beta_4) = \int_0^{\beta_4} g_2^{-1}(t)dt - \int_0^{\beta_3} f_2^{-1}(t)dt \quad (3.20)$$

### 3.3 Existência do ponto de equilíbrio

**Lema 3.1.** A função  $h_1^1$  é decrescente e sua imagem é dada por  $\text{Im}(h_1^1) = [\int_b^0 tf_1(t)dt, 0]$ .

**Demonstração.** Análoga à demonstração do Lema 2.2.

**Lema 3.2.** A função  $h_2^1$  é crescente e sua imagem é dada por  $\text{Im}(h_2^1) = [0, \int_0^a tg_1(t)dt]$ .

**Demonstração.** Análoga à demonstração do Lema 2.1.

**Lema 3.3.** A função  $h_1^2$  é decrescente e sua imagem é dada por  $\text{Im}(h_1^2) = [\int_d^0 tf_2(t)dt, 0]$ .

**Demonstração.** Análoga à demonstração do Lema 2.2.

**Lema 3.4.** A função  $h_2^2$  é crescente e sua imagem é dada por  $\text{Im}(h_2^2) = [0, \int_0^c tg_2(t)dt]$ .

**Demonstração.** Análoga à demonstração do Lema 2.1.

**Teorema 3.1.** Seja  $S$  um sistema p-fuzzy e  $\mathbb{R}^*$  uma região viável de equilíbrio de  $S$ . Então,  $\mathbb{R}^*$  possui pelo menos um ponto de equilíbrio, isto é, existe  $(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^*$  tal que,

$$\Delta(x^*, y^*) = (\Delta_1(x^*, y^*), \Delta_2(x^*, y^*)) = (0, 0).$$

**Demonstração.** Temos que:

$$\begin{aligned} A_1(c_1) = 0 &\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \min\{A_1(c_1), B_1(d_1)\} = \min\{0, B_1(d_1)\} = 0 \\ \alpha_2 = \min\{A_1(c_1), B_2(d_1)\} = \min\{0, 0\} = 0 \\ \alpha_3 = \min\{A_2(c_1), B_1(d_1)\} = \min\{0, B_1(d_1)\} = 0 \\ \alpha_4 = \min\{A_2(c_1), B_2(d_1)\} = \min\{0, 0\} = 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 0 \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} h_1^1(\beta_1) + h_2^1(\beta_2) &= \int_b^{f_1^{-1}(\beta_1)} tf_1(t)dt + \int_{f_1^{-1}(\beta_1)}^0 \beta_1 t dt + \int_0^{g_1^{-1}(\beta_2)} \beta_2 t dt + \int_{g_1^{-1}(\beta_2)}^a tg_1(t)dt \\ &= \int_b^{f_1^{-1}(0)} tf_1(t)dt + \int_{f_1^{-1}(0)}^0 0t dt + \int_0^{g_1^{-1}(0)} 0t dt + \int_{g_1^{-1}(0)}^a tg_1(t)dt \\ &= \int_b^b tf_1(t)dt + \int_a^a tg_1(t)dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 h_1^2(\beta_3) + h_2^2(\beta_4) &= \int_d^{f_2^{-1}(\beta_3)} t f_2(t) dt + \int_{f_2^{-1}(\beta_3)}^0 \beta_3 t dt + \int_0^{g_2^{-1}(\beta_4)} \beta_4 t dt + \int_{g_2^{-1}(\beta_4)}^c t g_2(t) dt \\
 &= \int_d^{f_2^{-1}(0)} t f_2(t) dt + \int_{f_2^{-1}(0)}^0 0 t dt + \int_0^{g_2^{-1}(0)} 0 t dt + \int_{g_2^{-1}(0)}^c t g_2(t) dt \\
 &= \int_d^d t f_2(t) dt + \int_c^c t g_2(t) dt \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Portanto  $(c_1, d_1)$  é um ponto de equilíbrio. Analogamente, se supormos que  $A_2(c_2) = 0$ , chegaremos que  $(c_2, d_2)$  é ponto um ponto de equilíbrio. Agora, suponhamos que  $A_1(c_1), A_2(c_2) > 0$ . Dado  $x_0 \in [c_1, c_2]$  consideremos as funções

$$\beta_1(y) = \max\{\min\{A_1(x_0), B_2(y)\}, \min\{A_2(x_0), B_2(y)\}\} \quad (3.21)$$

$$\beta_2(y) = \max\{\min\{A_1(x_0), B_1(y)\}, \min\{A_2(x_0), B_1(y)\}\} \quad (3.22)$$

para  $y \in [d_1, d_2]$ . Pela Proposição 1.1, as funções em (3.21) e (3.22) podem ser reescritas como:

$$\beta_1(y) = \min\{B_2(y), \max\{A_1(x_0), A_2(x_0)\}\} \quad (3.23)$$

$$\beta_2(y) = \min\{B_1(y), \max\{A_1(x_0), A_2(x_0)\}\} \quad (3.24)$$

para  $y \in [d_1, d_2]$ .

Agora, consideremos a função  $h(y) = h_1^1(\beta_1(y)) + h_2^1(\beta_2(y))$ . Como  $\max\{A_1(x_0), A_2(x_0)\} \neq 0, \forall x_0 \in [c_1, c_2]$  (pois,  $A_1(c_1), A_2(c_2) > 0$ ), então

$$\beta_1(d_1) = \min\{B_2(d_1), \max\{A_1(x_0), A_2(x_0)\}\} = 0,$$

$$\beta_2(d_1) = \min\{B_1(d_1), \max\{A_1(x_0), A_2(x_0)\}\} \neq 0,$$

$$\beta_2(d_2) = \min\{B_1(d_2), \max\{A_1(x_0), A_2(x_0)\}\} = 0,$$

$$\beta_1(d_2) = \min\{B_2(d_2), \max\{A_1(x_0), A_2(x_0)\}\} \neq 0.$$

Pelos Lemas 3.1 e 3.2, temos que:

$$h(d_1) = h_1^1(\beta_1(d_1)) + h_2^1(\beta_2(d_1)) = h_2^1(\beta_2(d_1)) > 0$$

e

$$h(d_2) = h_1^1(\beta_1(d_2)) + h_2^1(\beta_2(d_2)) = h_1^1(\beta_1(d_2)) < 0$$

Daí, como  $h$  é contínua, segue do Teorema do Valor Intermediário que existe  $y_0 \in [d_1, d_2]$  tal que  $h(y_0) = 0 \Rightarrow \Delta_1(x_0, y_0) = 0$ . Como  $x_0$  foi tomado arbitrariamente o resultado vale para todo  $x \in [c_1, c_2]$ , isto é, a imagem inversa do 0 por  $\Delta_1$ ,  $\Delta_1^{-1}(0)$ , é uma curva  $\omega_1 : [d_1, d_2] \rightarrow [c_1, c_2]$  contínua, pois  $\Delta_1$  é contínua. De modo análogo, mostra-se que  $\Delta_2^{-1}(0)$  é uma curva contínua,  $\omega_2 : [c_1, c_2] \rightarrow [d_1, d_2]$ . Daí, pelo Teorema do Valor Intermediário,  $\omega_1$  e  $\omega_2$  se interceptam em pelo menos um ponto,  $(x^*, y^*)$ , o qual é um ponto de equilíbrio do sistema.

### 3.4 Identificação do ponto de equilíbrio

Dado um sistema p-fuzzy bidimensional  $S$ , seja  $R^* = \text{supp}(A^*) \times \text{supp}(B^*)$  uma região viável de equilíbrio de  $S$ . Vamos decompor o sistema  $S$  em dois sistemas unidimensionais  $S_1$  e  $S_2$  tais que  $A^*$  é um conjunto viável de equilíbrio de  $S_1$  e  $B^*$  é um conjunto viável de equilíbrio de  $S_2$ . A decomposição do sistema  $S$  nos sistemas  $S_1$  e  $S_2$  depende das regras associadas a  $S$ . Por exemplo, no caso do sistema p-fuzzy bidimensional descrito na seção 3.2,  $S_1$  é o sistema  $(A_1, A_2) \rightarrow (f_2, g_2)$  e  $S_2$  é o sistema  $(B_1, B_2) \rightarrow (g_1, f_1)$ .

**Observação 3.1.** *Indicaremos por  $z_0 \in [c_1, c_2]$  a abscissa da intercessão entre as funções de pertinência de  $A_1$  e  $A_2$  e, por  $w_0 \in [d_1, d_2]$  a intercessão entre as funções de pertinência de  $B_1$  e  $B_2$ .*

**Observação 3.2.** *Para simplificar a notação, dado  $y_1 \in [d_1, d_2]$  indicaremos por  $r_{y_1}$  a função  $\beta_3(x, y_1) = \min\{A_1(x), \max\{B_1(y_1), B_2(y_1)\}\}$  e por  $s_{y_1}$  a função  $\beta_4(x, y_1) = \min\{A_2(x), \max\{B_1(y_1), B_2(y_1)\}\}$ ,  $x \in [c_1, c_2]$ . Dado um  $x_2 \in [c_1, c_2]$  indicaremos por  $r_{x_2}$  a função  $\beta_2(x_2, y) = \min\{B_1(y), \max\{A_1(x_2), A_2(x_2)\}\}$  e por  $s_{x_2}$  a função  $\beta_1(x_2, y) = \min\{B_2(y), \max\{A_1(x_2), A_2(x_2)\}\}$ ,  $y \in [d_1, d_2]$ .*

**Teorema 3.2.** *Suponhamos que  $x_1 \in \text{supp}(A^*)$  é o único ponto de equilíbrio de  $S_1$  em  $A^*$  e  $y_1 \in \text{supp}(B^*)$  é o único ponto de equilíbrio de  $S_2$  em  $B^*$ . Se  $x_1 \in (c_1, z_0)$  e  $y_1 \in (d_1, w_0)$  então:*

- i) *Se  $A_1(x_1) \geq B_1(y_1)$ , então  $(x_2, y_1)$  é ponto de equilíbrio de  $S$  e  $x_2 \in (A_1^{-1}(B_1(y_1)), x_1]$ ;*
- ii) *Se  $A_1(x_1) \leq B_1(y_1)$ , então  $(x_1, y_2)$  é ponto de equilíbrio de  $S$  e  $y_2 \in (B_1^{-1}(A_1(x_1)), y_1]$ ;*
- iii) *Se  $A_1(x_1) = B_1(y_1)$ , então  $(x_1, y_1)$  é ponto de equilíbrio de  $S$ .*

**Demonstração.** Provemos o item i). Consideremos a função  $H_2(x) = h_1^2(r_{y_1}(x)) + h_2^2(s_{y_1}(x))$ . Por hipótese,  $S_1$  possui um único ponto de equilíbrio, então pelo Corolário 2.3, tomando  $\sigma = \max[B_1(y_1), B_2(y_1)]$  o sistema  $(r_\sigma, s_\sigma) \rightarrow (f_2, g_2)$  satisfaz o Teorema 2.4. Portanto, existe um único  $x_2 \in (c_1, z_0)$  tal que  $H_2(x_2) = 0$ . Logo,  $\Delta_2(x_2, y_1) = 0$ .

Suponha por absurdo que  $x_2 \notin [A_1]^{B_1(y_1)}$ , então  $A_1(x_2) < B_1(y_1)$ . Além disso, como  $x_2 \in (c_1, z_0)$  e  $y_1 \in (d_1, w_0)$ , então  $A_2(x_2) < A_1(x_2)$  e  $B_2(y_1) < B_1(y_1)$ . Logo,

$$r_{y_1}(x_2) = \min\{A_1(x_2), \max\{B_1(y_1), B_2(y_1)\}\} = \min\{A_1(x_2), B_1(y_1)\} = A_1(x_2)$$

e

$$s_{y_1}(x_2) = \min\{A_2(x_2), \max\{B_1(y_1), B_2(y_1)\}\} = \min\{A_2(x_2), B_1(y_1)\} = A_2(x_2).$$

Daí, temos que:

$$0 = H_2(x_2) = h_1^2(r_{y_1}(x_2)) + h_2^2(s_{y_1}(x_2)) = h_1^2(A_1(x_2)) + h_2^2(A_2(x_2)).$$

Portanto,  $x_2$  é ponto de equilíbrio de  $S_1$ . Como  $x_1$  é o único ponto de equilíbrio de  $S_1$ , então  $x_1 = x_2$ . Por outro lado,  $A_1(x_1) \geq B_1(y_1)$  por hipótese. Daí, segue que  $A_1(x_1) > A_1(x_2)$ , o que é uma contradição. Portanto,

$$x_2 \in [A_1]^{B_1(y_1)} \Rightarrow A_1(x_2) \geq B_1(y_1).$$

Assim, temos que

$$r_{x_2}(y_1) = \min\{B_1(y_1), \max\{A_1(x_2), A_2(x_2)\}\} = \min\{B_1(y_1), A_1(x_2)\} = B_1(y_1)$$

e

$$s_{x_2}(y_1) = \min\{B_2(y_1), \max\{A_1(x_2), A_2(x_2)\}\} = \min\{B_2(y_1), A_1(x_2)\} = B_2(y_1).$$

Consideremos a função  $H_1(y) = h_1^1(s_{x_2}(y)) + h_2^1(r_{x_2}(y))$ . Temos que  $H_1(y_1) = h_1^1(s_{x_2}(y_1)) + h_2^1(r_{x_2}(y_1)) = h_1^1(B_2(y_1)) + h_2^1(B_1(y_1)) = 0$  por hipótese. Portanto  $\Delta_1(x_2, y_1) = 0$ , o que conclui a demonstração de que  $(x_2, y_1)$  é ponto de equilíbrio de  $S$ .

Agora, vamos provar agora que  $x_2 < x_1$ , isto é, que  $x_2 \in (A_1^{-1}(B_1(y_1)), x_1)$ . Pelos Lemas 3.3 e 3.4, temos que  $h_1^2$  é uma função decrescente e  $h_2^2$  é uma função crescente.

Como  $x_1$  é ponto de equilíbrio de  $S_1$ ,

$$h_1^2(A_1(x_1)) + h_2^2(A_2(x_1)) = 0 \tag{3.25}$$

e

$$s_{y_1}(x_1) = A_2(x_1). \quad (3.26)$$

Como por hipótese  $A_1(x_1) > B_1(y_1) = r_{y_1}(x_1)$ , então

$$h_1^2(A_1(x_1)) < h_1^2(r_{y_1}(x_1)). \quad (3.27)$$

De (3.25), (3.26) e (3.27), segue que

$$\begin{aligned} h_1^2(r_{y_1}(x_1)) + h_2^2(s_{y_1}(x_1)) &= h_1^2(r_{y_1}(x_1)) + h_2^2(A_2(x_1)) \\ &= h_1^2(r_{y_1}(x_1)) - h_1^2(A_1(x_1)) \\ &> 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$h_1^2(r_{y_1}(x_1)) + h_2^2(s_{y_1}(x_1)) > 0.$$

Dado  $x_2 > x_1 \Rightarrow A_2(x_2) > A_2(x_1) \Leftrightarrow s_{y_1}(x_2) > s_{y_1}(x_1) \Rightarrow h_2^2(s_{y_1}(x_2)) > h_2^2(s_{y_1}(x_1))$ .

Somando  $h_1^2(r_{y_1}(x_1))$  a esta desigualdade tem-se,

$$h_1^2(r_{y_1}(x_1)) + h_2^2(s_{y_1}(x_2)) > h_1^2(r_{y_1}(x_1)) + h_2^2(s_{y_1}(x_1)) > 0.$$

Como  $r_{y_1}(x_1) = r_{y_1}(x_2)$  então da equação acima,  $0 < h_1^2(r_{y_1}(x_2)) + h_2^2(s_{y_1}(x_2)) = \Delta_2(x_2, y_1)$ . Portanto  $x_2 > x_1 \Rightarrow \Delta_2(x_2, y_1) > 0$ , logo  $x_2 \in (A_1^{-1}(B_1(y_1)), x_1)$ . O que conclui a demonstração de i). A demonstração de ii) é análoga à demonstração de i) e, a demonstração de iii) é consequência de i) e ii).

**Corolário 3.1.** *Seja S um sistema que satisfaz a condição i) do Teorema 3.2. Então, numa vizinhança do ponto de equilíbrio  $(x_2, y_1)$  tem-se  $A_2(x) < B_1(y)$ .*

**Demonstração.** Segue imediatamente do Teorema 3.2, lembrando que as saídas são não simétricas.

**Corolário 3.2.** *Seja S um sistema que satisfaz a condição ii) do Teorema 3.2. Então, numa vizinhança do ponto de equilíbrio  $(x_1, y_2)$  tem-se  $B_2(y) < A_1(x)$ .*

**Demonstração.** Análoga à demonstração do Corolário 3.1.

## 3.5 Unicidade do ponto de equilíbrio

### 3.5.1 Unicidade - saídas simétricas

Para saídas monótonas e simétricas, isto é,  $f_1(t) = g_1(-t)$  e  $f_2(t) = g_2(-t)$ , temos que:

**Lema 3.5.**  $(x, y)$  é ponto de equilíbrio se, e somente se,  $\beta_1(x, y) = \beta_2(x, y)$  e  $\beta_3(x, y) = \beta_4(x, y)$ .

**Demonstração.** Como  $f_1(t) = g_1(-t)$ , então  $f_1(-a) = g_1(a) = 0 = f_1(b) \Rightarrow b = -a$ , pois  $f_1$  é monótona. Analogamente,  $c = -d$ .

Temos ainda que,  $f_1(t) = g_1(-t) \Rightarrow g_1^{-1}(f_1(t)) = g_1^{-1}(g_1(-t)) = -t = -f_1^{-1}(f_1(t)) \Rightarrow f_1^{-1}(y) = -g_1^{-1}(y)$ . Analogamente,  $f_2^{-1}(y) = -g_2^{-1}(y)$ .

( $\Rightarrow$ ) Se  $(x, y)$  é ponto de equilíbrio, então

$$\begin{aligned} \Delta_1(x, y) = 0 &\Rightarrow h_1^1(\beta_1) + h_2^1(\beta_2) = 0 \\ &\Rightarrow h_1^1(\beta_1) = -h_2^1(\beta_2). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Daí,

$$\begin{aligned} h_1^1(\beta_1) &= \int_b^{f_1^{-1}(\beta_1)} t f_1(t) dt + \int_{f_1^{-1}(\beta_1)}^0 \beta_1 t dt \\ &= \int_{-a}^{-g_1^{-1}(\beta_1)} t g_1(-t) dt + \int_{-g_1^{-1}(\beta_1)}^0 \beta_1 t dt \\ &= \int_{-a}^{-g_1^{-1}(\beta_1)} (-t) g_1(-t) (-dt) + \int_{-g_1^{-1}(\beta_1)}^0 \beta_1 (-t) (-dt). \end{aligned}$$

Fazendo  $u = -t \Rightarrow du = -dt$ , segue que

$$\begin{aligned} h_1^1(\beta_1) &= \int_a^{g_1^{-1}(\beta_1)} u g_1(u) du + \int_{g_1^{-1}(\beta_1)}^0 \beta_1 u du \\ &= - \int_0^{g_1^{-1}(\beta_1)} \beta_1 u du - \int_{g_1^{-1}(\beta_1)}^a u g_1(u) du \\ &= -h_2^1(\beta_1). \end{aligned} \quad (3.29)$$

De (3.28), (3.29) e do Lema 3.2, temos que

$$-h_2^1(\beta_2) = -h_2^1(\beta_1) \Rightarrow h_2^1(\beta_2) = h_2^1(\beta_1) \Rightarrow \beta_1 = \beta_2.$$

De forma análoga, tem-se  $\beta_3 = \beta_4$ .

( $\Leftarrow$ ) Se  $\beta_1 = \beta_2$  e  $\beta_3 = \beta_4$ , então

$$\begin{aligned} h_1^1(\beta_1) &= \int_b^{f_1^{-1}(\beta_1)} t f_1(t) dt + \int_{f_1^{-1}(\beta_1)}^0 \beta_1 t dt \\ &= \int_{-a}^{-g_1^{-1}(\beta_2)} t g_1(-t) dt + \int_{-g_1^{-1}(\beta_2)}^0 \beta_2 t dt \\ &= \int_{-a}^{-g_1^{-1}(\beta_2)} (-t) g_1(-t) (-dt) + \int_{-g_1^{-1}(\beta_2)}^0 \beta_2(-t) (-dt). \end{aligned}$$

Fazendo  $u = -t \Rightarrow du = -dt$ , segue que

$$\begin{aligned} h_1^1(\beta_1) &= \int_a^{g_1^{-1}(\beta_2)} u g_1(u) du + \int_{g_1^{-1}(\beta_2)}^0 \beta_2 u du \\ &= - \int_0^{g_1^{-1}(\beta_2)} \beta_2 u du - \int_{g_1^{-1}(\beta_2)}^a u g_1(u) du \\ &= -h_2^1(\beta_2). \end{aligned} \tag{3.30}$$

De (3.30), temos que

$$h_1^1(\beta_1) + h_2^1(\beta_2) = -h_2^1(\beta_2) + h_2^1(\beta_2) = 0 \Rightarrow \Delta_1(x, y) = 0.$$

Analogamente, tem-se  $\Delta_2(x, y) = 0$ . Portanto  $(x, y)$  é ponto de equilíbrio.

**Proposição 3.1.** *Se  $(x^*, y^*)$  é tal que  $A_1(x^*) = A_2(x^*)$  e  $B_1(y^*) = B_2(y^*)$ , então  $(x^*, y^*)$  é um ponto de equilíbrio.*

**Demonstração.** De fato,

$$\begin{aligned} \beta_1(x^*, y^*) &= \min\{B_2(y^*), \max\{A_1(x^*), A_2(x^*)\}\} \\ &= \min\{B_1(y^*), \max\{A_1(x^*), A_2(x^*)\}\} \\ &= \beta_2(x^*, y^*) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \beta_3(x^*, y^*) &= \min\{A_1(x^*), \max\{B_1(y^*), B_2(y^*)\}\} \\ &= \min\{A_2(x^*), \max\{B_1(y^*), B_2(y^*)\}\} \\ &= \beta_4(x^*, y^*). \end{aligned}$$

Pelo Lema 3.5,  $(x^*, y^*)$  é ponto de equilíbrio.

**Lema 3.6.** *Se  $A_1(x^*) > B_1(y^*)$  então  $\forall x \in [A^*]^{B_1(y^*)} \cap [c_1, c_2], (x, y^*)$  é ponto de equilíbrio.*

**Demonstração.**  $x \in [A^*]^{B_1(y^*)} \Leftrightarrow A^*(x) \geq B_1(y^*) \Leftrightarrow \min\{A_1(x), A_2(x)\} \geq B_1(y^*)$ .

Donde tem-se:

$$\begin{cases} A_1(x) \geq B_1(y^*) = B_2(y^*) \\ A_2(x) \geq B_1(y^*) = B_2(y^*) \end{cases}$$

Então,

$$\beta_1(x, y^*) = \min\{B_2(y^*), \max\{A_1(x), A_2(x)\}\} = B_2(y^*) = B_1(y^*) = \beta_2(x, y^*)$$

e

$$\beta_3(x, y^*) = \min\{A_1(x), \max\{B_1(y^*), B_2(y^*)\}\} = B_1(y^*) = B_2(y^*) = \beta_4(x, y^*).$$

Daí, segue que  $\Delta_1(x, y^*) = \Delta_2(x, y^*) = 0, \forall x \in [A^*]^{B_1(y^*)}$ , o que conclui a demonstração.

**Lema 3.7.** *Se  $A_1(x^*) < B_1(y^*)$  então  $\forall y \in [B^*]^{A_1(x^*)} \cap [d_1, d_2], (x^*, y)$  é ponto de equilíbrio.*

**Demonstração.** Análoga à demonstração do Lema 3.6.

**Lema 3.8.** *Dados  $a, b, c \in \mathbb{R}, \min\{a, b\} = \min\{c, b\}$  se, e somente se,  $b \leq a, c$  ou  $a = c$ .*

**Demonstração.** ( $\Rightarrow$ ) Suponhamos que  $\min\{a, b\} = \min\{c, b\}$ . Se  $a, c < b$ , então

$$a = \min\{a, b\} = \min\{c, b\} = c \Rightarrow a = c.$$

Agora, suponha  $a \neq c$ , temos os seguintes casos:

- i)  $\min\{a, b\} = a$  e  $\min\{c, b\} = c$ ;
- ii)  $\min\{a, b\} = a$  e  $\min\{c, b\} = b$ ;
- iii)  $\min\{a, b\} = b$  e  $\min\{c, b\} = c$ ;
- iv)  $\min\{a, b\} = b$  e  $\min\{c, b\} = b$ .

O caso i) não pode ocorrer pois teríamos  $a = \min\{a, b\} = \min\{c, b\} = c$ .

Se ocorrer ii) temos que:

$$a = b \Rightarrow b \leq a, c.$$

Se ocorrer iii) temos que:

$$b = c \Rightarrow b \leq a, c.$$

Se ocorrer iv) temos que:

$$b \leq a, c.$$

Logo, em todos os casos possíveis temos  $b \leq a, c$ .

( $\Leftarrow$ ) Imediato.

**Teorema 3.3.** *Seja  $R^* = \text{supp}(A^*) \times \text{supp}(B^*)$  uma região viável de um equilíbrio de um sistema p-fuzzy  $S$ . Se  $S$  é decomposto em  $S_1$  e  $S_2$  tal que  $A^*$  é um conjunto viável de equilíbrio de  $S_1$  e  $B^*$  é um conjunto viável de equilíbrio de  $S_2$ , então  $(x^*, y^*) \in R^*$  é único se, e somente se,*

$$A_1(x^*) = A_2(x^*) = B_1(y^*) = B_2(y^*).$$

**Demonstração.** ( $\Rightarrow$ ) Suponhamos que o ponto de equilíbrio seja único. Se tivermos  $A_1(x^*) > B_1(y^*)$  (ou  $A_1(x^*) < B_1(y^*)$ ), então pelo Lema 3.6 (ou Lema 3.7) o ponto não é único, o que contraria à hipótese. Portanto,  $A_1(x^*) = A_2(x^*) = B_1(y^*) = B_2(y^*)$ .

( $\Leftarrow$ ) Suponhamos agora que  $A_1(x^*) = A_2(x^*) = B_1(y^*) = B_2(y^*)$ . Dado  $(x_1, y_1) \in \text{supp}(A^*) \times \text{supp}(B^*)$  com  $(x_1, y_1) \neq (x^*, y^*)$  vamos mostrar que  $(x_1, y_1)$  não é ponto de equilíbrio. Pelo Lema 3.5  $(x_1, y_1)$  é ponto de equilíbrio se, e somente se,

$$\beta_1(x_1, y_1) = \beta_2(x_1, y_1) \text{ e } \beta_3(x_1, y_1) = \beta_4(x_1, y_1).$$

Ou seja, se, e somente se,

$$\min\{B_2(y_1), \max\{A_1(x_1), A_2(x_1)\}\} = \min\{B_1(y_1), \max\{A_1(x_1), A_2(x_1)\}\} \quad (3.31)$$

$$\min\{A_1(x_1), \max\{B_1(y_1), B_2(y_1)\}\} = \min\{A_2(x_1), \max\{B_1(y_1), B_2(y_1)\}\} \quad (3.32)$$

Suponhamos que  $y_1 \neq y^* \Leftrightarrow B_1(y_1) \neq B_2(y_1)$ . Pelo Lema 3.8 e equação 3.31 temos que:

$$B_1(y_1), B_2(y_1) \geq \max\{A_1(x_1), A_2(x_1)\}. \quad (3.33)$$

De (3.33) tem-se,

$$A_1(x_1), A_2(x_1) \leq \max\{B_1(y_1), B_2(y_1)\}. \quad (3.34)$$

De (3.32) e (3.34) tem-se,

$$A_1(x_1) = A_2(x_1) \Leftrightarrow x_1 = x^* \Rightarrow A_1(x_1) = A_1(x^*) = B_1(y^*),$$

Substituindo estes resultados em 3.33 tem-se,

$$B_1(y_1), B_2(y_1) \geq A_1(x^*) = B_1(y^*)$$

o que é um absurdo, pois para todo  $y_1 \in \text{supp}(B^*)$  com  $y_1 \neq y^*$  tem-se  $B_1(y_1) < B_1(y^*)$  ou  $B_2(y_1) < B_1(y^*)$ .

Se supormos  $x_1 \neq x^*$ , de modo análogo, chega-se a um absurdo! Portanto  $(x^*, y^*)$  é o único ponto de equilíbrio de  $S$  em  $R^*$ .

**Teorema 3.4.** *Seja  $S$  um sistema bidimensional, decomposto nos sistemas unidimensionais  $S_1$  e  $S_2$  tal que,  $x_1$  é o único ponto de equilíbrio de  $S_1$  e  $y_1$  é o único ponto de equilíbrio de  $S_2$ :*

*i) Se  $S_1$  possui saída simétrica e  $\beta = \max\{B_1(y_1), B_2(y_1)\} < A_1(x_1) = A_2(x_1)$ , então  $\forall x \in [A^*]^\beta \cap [c_1, c_2]$ ,  $(x, y_1)$  é ponto de equilíbrio de  $S$ ;*

*ii) Se  $S_2$  possui saída simétrica e  $\alpha = \max\{A_1(x_1), A_2(x_1)\} < B_1(y_1) = B_2(y_1)$ , então  $\forall y \in [B^*]^\alpha \cap [d_1, d_2]$ ,  $(x_1, y)$  é ponto de equilíbrio de  $S$ .*

**Demonstração.** A demonstração é análoga à demonstração do Lema 3.6.

**Corolário 3.3.**  *$S$  possui um único ponto de equilíbrio se, e somente se, tivermos  $\beta = \max\{B_1(y_1), B_2(y_1)\} \geq A_1(x_1) = A_2(x_1)$  ou  $\alpha = \max\{A_1(x_1), A_2(x_1)\} \geq B_1(y_1) = B_2(y_1)$ .*

**Demonstração.** Análoga à demonstração do Teorema 3.3.

### 3.5.2 Unicidade - saídas não simétricas

Indicaremos por  $z_0 \in [c_1, c_2]$  a abscissa da intercessão entre as funções de pertinências de  $A_1$  e  $A_2$  e por  $w_0 \in [d_1, d_2]$  a intercessão entre as funções de pertinências de  $B_1$  e  $B_2$ . Para saídas não simétricas temos:

**Teorema 3.5.** *Seja  $S$  um sistema bidimensional, decomposto nos sistemas unidimensionais  $S_1$  e  $S_2$ . Se  $S_1$  e  $S_2$  possuem, cada um, um único ponto de equilíbrio, então  $S$  possui um único ponto de equilíbrio.*

**Demonstração.** Vamos fazer a demonstração para o caso em que  $S$  satisfaz ao Teorema 3.2. Os outros casos são análogos. Se tivermos  $y_1 = B_1^{-1}(1) \Rightarrow x_1 = A_1^{-1}(1)$ ,

claramente  $(x_1, y_1)$  é o único ponto de equilíbrio de  $S$ . Suponhamos então que  $y_1 \neq B_1^{-1}(1)$ . Seja  $(x_3, y_3) \in [c_1, z_0] \times [d_1, w_0]$ ,  $(x_3, y_3) \neq (x_2, y_1)$ . Vamos mostrar que  $\Delta(x_3, y_3) = (\Delta_1(x_3, y_3), \Delta_2(x_3, y_3)) \neq 0$ . Inicialmente, notemos que  $x_3 \neq x_2$  e  $y_3 \neq y_1$ , pois as imagens inversas do 0 por  $\Delta_1$  e  $\Delta_2$ ,  $\Delta_1^{-1}(0)$  e  $\Delta_2^{-1}(0)$ , são funções (aplicação imediata do Corolário 2.3). Chamemo-as respectivamente de  $\omega_1$  e  $\omega_2$ ,  $\omega_1 : [d_1, d_2] \rightarrow [c_1, c_2]$  e  $\omega_2 : [c_1, c_2] \rightarrow [d_1, d_2]$ . Suponhamos que  $x_3 \in [A_1]^{B_1(y_1)} \Leftrightarrow A_1(x_3) \geq B_1(y_1) \Rightarrow \Delta_2(x_3, y_1) = h_1^2(r_{x_3}(y_1)) + h_2^2(s_{x_3}(y_1)) = 0$ , pois  $y_1$  é equilíbrio de  $S_2$  por hipótese. Daí  $\Delta_2(x_3, y_3) \neq 0$ , pois caso contrário teríamos  $\omega_2(x_3) = y_1$  e  $\omega_2(x_3) = y_3$  o que é um absurdo, pois  $y_1 \neq y_3$  e  $\omega_2$  é uma função. Suponhamos que  $x_3 \notin [A_1]^{B_1(y_1)} \Leftrightarrow$

$$A_1(x_3) < B_1(y_1). \quad (3.35)$$

Suponhamos ainda que

$$\Delta_2(x_3, y_3) = h_1^2(r_{x_3}(y_3)) + h_2^2(s_{x_3}(y_3)) = 0. \quad (3.36)$$

De (3.35) e (3.36) temos que  $r_{x_3}(y_3) = A_1(x_3)$ , pois  $y_3 \neq y_1$  e  $y_1$  é o único ponto de equilíbrio de  $S_2$ . Daí,

$$B_1(y_3) > A_1(x_3) \Rightarrow \begin{cases} r_{y_3}(x_3) = A_1(x_3) \\ s_{y_3}(x_3) = A_2(x_3) \end{cases} \quad (3.37)$$

Suponhamos agora  $\Delta_1(x_3, y_3) = h_1^1(r_{y_3}(x_3)) + h_2^1(s_{y_3}(x_3)) = 0$ . Daí, usando (3.37) tem-se  $h_1^1(A_1(x_3)) + h_2^1(A_2(x_3)) = 0 \Rightarrow x_3 = x_1$  pois  $x_1$  é o único ponto de equilíbrio de  $S_1$ . De (3.36) e de  $x_3 = x_1$  tem-se,

$$\Delta_2(x_3, y_3) = h_1^2(r_{x_1}(y_3)) + h_2^2(s_{x_1}(y_3)) = 0. \quad (3.38)$$

Mas,  $A_1(x_1) > B_1(y_1) \Rightarrow$

$$h_1^2(r_{x_1}(y_1)) + h_2^2(s_{x_1}(y_1)) = 0. \quad (3.39)$$

De (3.38) e (3.39) tem-se  $y_3 = y_1$  o que é um absurdo! Logo, não é possível ter  $\Delta_1(x_3, y_3) = \Delta_2(x_3, y_3) = 0$ , o que conclui a demonstração de que  $(x_2, y_1)$  é o único ponto de equilíbrio de  $S$ .

# Referências Bibliográficas

- [1] Barros, L. C. e Bassanezi, R. C. *Tópicos de Lógica Fuzzy e Biomatemática*, Coleção IMECC - Textos Didáticos, vol. 5, IMECC-UNICAMP, Campinas/SP, 2006.
- [2] Mamdani, E. H. e Assilian S. *Applications of Fuzzy Algorithms for Control of Simple Dynamic Plant*, Pro. IEEE, vol. 121, No. 12, pp. 1585–1588, 1974.
- [3] Silva, J. D. M. *Análise de Estabilidade de Sistemas Dinâmicos P-Fuzzy com Aplicações em Biomatemática*, Tese de Doutorado, IMECC-UNICAMP, Campinas/SP, 2005.
- [4] Zadeh, L. A. *Fuzzy Sets*, Information and Control, Volume 8, p. 338–353, 1965.